北京大学数学丛书

二阶矩阵群的表示与自守形式

黎景辉　蓝以中　著



北京大学出版社

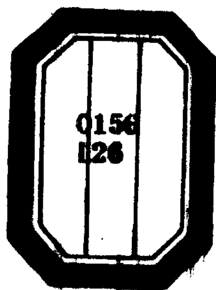
北京大学数学丛书

二阶矩阵群的表示与自守形式

黎景辉　蓝以中　著







北 京 大 学 出 版 社

内 容 简 介

以李群无限维表示理论的观点来研究自守形式理论是目前数论、代数、调和分析和几何学等学科交汇点上的一门新兴活跃的数学领域，它并且将是数学进展的一个重要方向。本书深入浅出地对Langlands的这个理论的基本内容进行了系统的阐述。全书共分六章，主要内容包括在代数数域上的2×2矩阵群在无限维的Hilbert空间上的表示与自守形式，Eisenstein级数的解析延拓和函数方程，以及迹公式的证明。本书采用的观点和论证的方法都是尽可能从较为初等的角度来引导读者进入这个领域。因此，本书给准备进入这个数学新领域从事研究工作的读者提供了一本最佳的入门教科书。

本书可作为高等学校数学专业研究生课教材，也可供高等学校数学专业师生，以及数学工作者参考。

书　　名：二阶矩阵群的表示与自守形式
著作责任者：黎景辉　蓝以中　著
责 任 编 辑：邱淑清
标 准 书 号：ISBN 7-301-01101-6/O·188
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：北京大学印刷厂
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168　32开本　7.875印张　187千字
1990年2月第1版　2000年6月第2次印刷
印　　数：3001—6000册
定　　价：12.50元

说　　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物。丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期周学时为3的研究生课程的取材。我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量。

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考。

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

序

数论是数学中一个重要的分支。数论既是古老的，又是永远年轻而活跃的。它是古老的，因为它研究的对象是自然数，这可以说是数学研究最早的和最基本的对象。数论向人们提出了不少问题，在一些问题解决之后，常常是一批新的、更为深入的问题又被提出，这就使数论一直是引起数学家关心的一个领域，同时也吸引着一批又一批年轻的数学工作者为解决这些有趣的问题而努力工作。不仅如此，在数论的发展过程中，随着研究的日益深入，它与数学的其它分支的联系也愈来愈广泛而密切，这就更显示出数论在整个数学中的重要地位。因而我们说，它永远年轻而活跃。

在上个世纪末，Hilbert 在他的“Zahlbericht”中一方面总结了数论直到十九世纪的发展，同时指出重要的研究方向。本世纪初，在他的启发下，Furtwängler，高木貞治以及 Artin 等人建立了类域论以及互反律，使数论的发展开始了一个新的阶段。到四十年代，A Weil 提出了他著名的猜想，指出了数论与代数几何的内在联系，这不但促进了代数几何的巨大发展，而且为数论的研究开辟了一个崭新的领域，从而得到了不少非常重要的结果。而在七十年代前后，R Langlands 提出了一系列新的猜想，指出了群的表示论与自守形式的联系，为数论的进一步研究提出了一个新的思想与计划。由于它的重要性，人们称之为“Langlands 计划”或“Langlands 思想”。近二十多年来，数论在这方向取得的大量重要的成果证实了“Langlands 计划”不但是正确的，而且是极其深刻的。

由于“Langlands 计划”涉及到数学的分支很多，所以为了

懂得Langlands的想法，学习现在的文献，如Jacquet-Langlands的专著，就需要先掌握大量的预备知识，这就给初学者带来很大的困难。

1986年我们请香港中文大学的黎景辉教授来我校讲学，向一般年轻的数论工作者介绍“Langlands计划”的基本思想。他通过一个特殊情形，即二阶矩阵群的表示论对自守形式理论的应用来说明一般理论的思路，尽可能用较为初等的方法，其中有些结果是第一次公开发表的。当时讲课的效果是好的。

现在，黎景辉教授与蓝以中教授合作，把当时的讲稿加以整理并适当补充，写成这本书。我相信，这本书的出版能使更多的人得到好处。为此，我感到非常高兴。

丁石孙

1989年10月于北大中关园

引　言

在大自然中有很多周期现象，我们用周期函数来描述这些现象。周期函数 $\sin 2\pi z$ 的周期是整数群 $\mathbf{Z}$，即是说，对整数 n，

$$\sin 2\pi(n+z)=\sin 2\pi z.$$

$\mathbf{Z}$ 是个简单的交换群。假如一个复杂的现象的周期 Γ 是一个类似 $\mathbf{Z}$(不一定交换)的群，例如 Γ 是系数是整数且行列式等于1的 2×2矩阵群 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$，则我们便会问：是否存在以 Γ 为周期，类似 $\sin 2\pi z$ 的函数 f? 即是说，对 $\gamma\in\Gamma$，

$$f(\gamma\cdot z)=f(z).$$

这样的函数我们称它为模函数。模函数便是研究以矩阵群为周期的现象的工具。如果现象空间是高维流形，则相应于模函数的微分形式便是自守形式了。

模函数理论在本世纪初奠基在 Poincaré 和 Hilbert, Klein 学派的工作上，30年代的主要工作者是 E.Hecke 和 H.Petersson. 随之而来的重要工作是 C.Siegel, H.Maass, A.Selberg, A.Weil, G.Shimura, I.Piatetski-Shapiro, P.Deligne, R.Langlands 等人做的。在70年代 Langlands 提出把李群无限维表示理论用作研究自守形式的工具，整个领域因此而变得更加活跃。自 Jacquet-Langlands 的专著出版至今，表示论方法已发展为人们所共知的工具。1983年美国科学院给总统的报告书说：“Klein 在1972 年所提出的 Erlangen 计划引起一个世纪的发展，今日最能继承Erlangen 计划的便是自守形式理论中的 Langlands 计划。”

本书透过一个简单的非交换群：2×2矩阵群，介绍无限维李群表示论的方法在自守形式理论中的应用。本书所采用的观点和论证的方法是为了帮助读者明白一般高维的情形，以为开展未来

的工作而铺路。在许多方面我们和Jacquet-Langlands的经典教材不同。比如，在讨论 GL(2,$\boldsymbol{R}$)的表示时我们是用现在通行的($\mathfrak{g}$, K)模理论，在研究 p 进域上的矩阵群表示时，我们用 Jacquet模理论而不直接谈 Kirilov-Whitaker 理论以减轻读者的负担，我们先介绍拓扑群的群代数以帮助读者明白 Hecke 代数，除了给出自守形式的定义外我们还列举例子以便与经典理论作比较，……。除此，我们又给出了GL(2,$\boldsymbol{R}$)的表示分类的初等证明，Adele群上的单元 Eisenstein 级数的理论，Arthur 的 GL(2)的迹公式，……等，这些都是首次发表的。这里的 Arthur 的迹公式是可以发展到高维情形，是现在通用的，是 Selberg 迹公式的推广。

我们假设读者懂拓扑群、代数数论(如 Adele 环)、Hilbert空间的基本理论。对没有足够背景知识的读者我们还是建议他们"边走边打"，即是说，在一边看本书时一边就把所需的材料补上。

现在让我们试谈谈自守形式与数论的关系。在 Mathematical Reviews 的分类中自守形式的编号是10D，是 10，即是数论的一部分。

数论里很多重要的问题是关于素数。考虑以下素数数列：

$$S=\{2,3,5,7,13,41,43,\cdots\},$$

这个素数数列的数学内容是这样的，对不可约整数系数多项式 f，取

$$S(f)=\{\text{素数 } p\text{: 存在整数 } n\text{，使 } p \text{ 除尽 } f(n)\}.$$

则以上的素数数列 S 是 $S(x^2+5)$。

让我们从域扩张的观点来考虑以上的问题。我们说素数 p 在代数数域 F 中完全分裂，如果主理想(p)在 F 中因子分解为互不相同的素理想 $\mathfrak{p}_i$ 的乘积，即

$$(p)=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_n.$$

设集$\mathscr{P}$的元为整数环 $\boldsymbol{Z}$ 的素数集合。又设集$\mathscr{F}$的元为有理数域$\boldsymbol{Q}$的有限 Galois 扩张。对 $F\in\mathscr{F}$，取

$$S(F)=\{\text{素数 } p: p \text{ 在 } F \text{ 中完全分裂}\},$$

这样便得映射

$$S: \mathscr{F} \to \mathscr{P}: F \mapsto S(F).$$

据 Tchebotarev 密度定理，S 是单射。对 $S_1, S_2 \in \mathscr{P}$，以 $S_1 \doteq S_2$ 表示除有限个元外集 S_1 和 S_2 是相同的。这样初等数论告诉我们

$$S = S(x^2+5) \doteq S(\boldsymbol{Q}(\sqrt{-5})).$$

设 $F \in \mathscr{F}$。令 $\mathrm{Gal}(F/\boldsymbol{Q})$ 记域扩张 $F/\boldsymbol{Q}$ 的 Galois 群。如果$\mathfrak{P}$是F 的素理想且 $\mathfrak{P}$ 整除素数 p，则存在 $\Phi_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{Gal}(F/\boldsymbol{Q})$，使得

$$\Phi_{\mathfrak{P}} x = x^p \pmod{\mathfrak{P}}$$

对F的代数整数 x 成立。称 $\Phi_{\mathfrak{P}}$ 为 $\mathfrak{P}$ 的 Frobenius 元。若 $\mathfrak{P}'$ 是另一个整除 p 的 F 内的素理想，则 $\Phi_{\mathfrak{P}}$ 和 $\Phi_{\mathfrak{P}'}$ 在 $\mathrm{Gal}(F/\boldsymbol{Q})$中共轭。所以 p 决定 $\mathrm{Gal}(F/\boldsymbol{Q})$的一个共轭类$\Phi_p$，称为 p 的Frobenius 共轭类。初等数论告诉我们

$$S(F) = \{p: \Phi_p = I\}.$$

以$\hat{\boldsymbol{Q}}$记由所有的代数数所组成的域。Galois 群 $\mathrm{Gal}(\hat{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ 是完全不连通紧拓扑群。设集 $\mathscr{G}$的元是群 $\mathrm{Gal}(\hat{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$的正规开子群。则 Galois 理论的基本定理说：存在单满映射

$$\mathscr{F} \to \mathscr{G}: F \mapsto \mathrm{Gal}(\hat{\boldsymbol{Q}}/F).$$

这样对任一连续表示

$$r: \mathrm{Gal}(\hat{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q}) \to \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$$

(其中 $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$是由系数是复数的 $n \times n$ 可逆矩阵所组成)，必存在 $F_r \in \mathscr{F}$，使得 r 的核

$$\mathrm{Ker}\, r = \mathrm{Gal}(\hat{\boldsymbol{Q}}/F_r).$$

因为 $\mathrm{Gal}(F_r/\boldsymbol{Q}) = \mathrm{Gal}(\hat{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})/\mathrm{Gal}(\hat{\boldsymbol{Q}}/F_r)$，所以我们可以定义

$$S(r) = \{p: r(\Phi_p) = I\}.$$

事实上，只要 p 在 F_r 中是非分歧，则 $r(\Phi_p)$ 是 $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$的半单共轭类。但半单共轭类是由类中的任一元的特征多项式决定，自然引进定义

$$L_p(z, r) = \det(I - r(\Phi_p)z)^{-1}.$$

以 S_r 记在 F_r 中分歧的素数集合。令

$$L(s,r)=\prod_{p\in S_r}L_p(p^{-s},r),$$

其中 $s\in\boldsymbol{C}$。称这个函数为表示 r 的 L 函数。

二次扩张 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-5})$ 的 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}(\sqrt{-5})/\boldsymbol{Q})$ 只有两个元：恒等同构 I，和同构 $\sigma:x+y\sqrt{-5}\mapsto x-y\sqrt{-5}$。考虑表示

$$r:\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}(\sqrt{-5})/\boldsymbol{Q})\to \mathrm{GL}(1,\boldsymbol{C}),$$

$$r(I)=1,\quad r(\sigma)=-1.$$

以$\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$记 Legendre 符号，则初等数论告诉我们

$$r(\Phi_p)=\left(\frac{-5}{p}\right).$$

这时 L 函数是

$$L(s,r)=\prod_{p\neq 2,5}\left(1-\left(\frac{-5}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1}.$$

可以算出

$$L(1,r)=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

以上公式右边的整数 2 告诉我们，为什么在 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-5})$ 中没有唯一分解（事实上：$3\cdot 7=21=(1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5})$），也告诉我们 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-5})$ 的任一整理想必定是以下形式：

$$\hat{\boldsymbol{Z}}A\cap\boldsymbol{Q}(\sqrt{-5}),$$

其中 $\hat{\boldsymbol{Z}}$ 是指由所有的代数整数所组成的环，A 是代数数，而且

$$[\boldsymbol{Q}(\sqrt{-5},A):\boldsymbol{Q}(\sqrt{-5})]\leqslant 2.$$

在以上的例子中我们看到怎样从一个素数数列 $\{2,3,5,7,13,41,\cdots\}$ 开始而得到一个复变函数 $L(s,r)$。我们自然会应用数学分析的工具来研究这个函数。

我们分别以 $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Q}_p,\boldsymbol{R},\boldsymbol{A}$ 记有理想数域，p 进数数域，实数

数域，$\boldsymbol{Q}$ 的 Adele 环。如果在 $\boldsymbol{Q}$ 取绝对值 $|x|$ 为范数，则 $\boldsymbol{R}$ 仅仅是 $\boldsymbol{Q}$ 的完备化。把任意非零的 $x\in\boldsymbol{Q}$ 分解为

$$x=p^{\nu_p(x)}ab^{-1},$$

其中 $\nu_p(x),a,b\in\boldsymbol{Z}$，而且 $p\nmid a$，$p\nmid b$。设

$$|x|_p=p^{-\nu_p(x)},$$

然后以 $|x|_p$ 为范数，则 $\boldsymbol{Q}$ 的完备化便是 p 进数域 $\boldsymbol{Q}_p$。$\boldsymbol{Q}$ 的 Adele 环 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{R}\times\prod_p\boldsymbol{Q}_p$ 的子环

$$\{(x_p):\text{对差不多所有的 } p,\ x_p \text{ 是 } p \text{ 进整数}\},$$

这样 $\boldsymbol{A}$ 便是局部紧拓扑环。利用 $\boldsymbol{A}$ 我们便可同时看 $\boldsymbol{Q}$ 的所有的赋值的完备化了。

我们以 G 记 $\mathrm{GL}(n)$。对任意的交换环 A，以 $G_A=\mathrm{GL}(n)_A$ 记由系数在 A 中，行列式为 A 的可逆元的 $n\times n$ 矩阵所组成的矩阵群。这样 G_Q 是 G_A 的离散子群。以 $\mathscr{L}=\mathscr{L}^2(G_Q/G_A)$ 记齐性空间 G_Q/G_A 上的二次可积函数所生成的 Hilbert 空间。对 $y\in G_A$，$\phi\in\mathscr{L}$，设

$$(R(y)\phi)(x)=\phi(xy),\quad x\in G_A,$$

称 R 为 G_A 的右正则表示。我们称 G_A 的不可约表示 π 为自守表示，如果 π 等价于 G_A 在 $\mathscr{L}$ 的某个子商 $\mathscr{L}_\pi$ 上的右正则表示。

因子分解整数

$$N=\prod_p p^{N_p}.$$

以 $\boldsymbol{Z}_p$ 记 p 进整数，设

$$K_p(N)=\{k\in\mathrm{GL}(n)_{Z_p}:\ k\equiv 1\ \ (\mathrm{mod}\ p^{N_p}\boldsymbol{Z}_p)\},$$

$$K(N)=\prod_p K_p(N).$$

$$Z=\{xI:\ x\in\boldsymbol{R},\ x>0\},$$

$$\mathscr{L}^{K(N)}=\mathscr{L}^2(Z\cdot G_Q\backslash G_A/K(N)),$$

$$t_{p,i}=\left[\begin{array}{cccccc}1&&&&&\\&\ddots&&&0&\\&&1&&&\\&&&p&&\\&0&&&\ddots&\\&&&&&p\end{array}\right]\Big\}\,i\quad,$$

$f_{p,i}$ = 双陪集 $K_p(N)t_{p,i}K_p(N)$的特征函数。

在$\mathscr{L}^{K(N)}$上的第 i 个 Hecke 算子 $T_{p,i}$是这样定义的：

$$T_{p,i}\phi=\phi*f_{p,i}=\int_{G_{Q_p}}f_{p,i}(y)R(y)\phi\mathrm{d}y,$$

其中 $\phi\in\mathscr{L}^{K(N)}$。如果 π 是自守表示，则存在N，使得对 $p\nmid N$，

$$\mathscr{L}_\pi^{K(N)}=\mathscr{L}_\pi\cap\mathscr{L}^{K(N)}$$

是对 $T_{p,i}$ 的作用不变的 1 维空间。即是存在常数 $c_{p,i}(\pi)$，使得

$$T_{p,i}\Big|_{\mathscr{L}_\pi^{K(N)}}=c_{p,i}(\pi)I,$$

其中I是恒等映射。我们定义 $\pi(\Phi_p)$为 $\mathrm{GL}(n)_C$ 的半单共轭类，使得

$$\det(1-\pi(\Phi_p)z)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i p^{\frac{1}{2}i(n-i)}c_{p,i}(\pi)z^i.$$

定义 π 的 L 函数为

$$L(s,\pi)=\prod_{p\nmid N}\det(1-\pi(\Phi_p)p^{-s})^{-1}.$$

Langlands 猜想：对任一连续表示

$$r:\ \mathrm{Gal}(\hat{Q}/Q)\to\mathrm{GL}(n)_C,$$

存在 $\mathrm{GL}(n)_A$ 的自守表示 π，使得

$$L(s,r)=L(s,\pi).$$

亦可以说，除有限个素数 p 外，$r(\Phi_p)=\pi(\Phi_p)$。于是

$$S(F_r)=\{p:\pi(\Phi_p)=1\}.$$

这样有限扩张 F_r/Q 便对应于 $\mathrm{GL}(n)$的自守表示 π。经典的类域

论告诉我们，每一个交换有限扩张 F/Q 对应于GL(1)的特征标（=GL(1)的自守表示）。从这个观点来看 Langlands 猜想，可以说是经典的类域论的非交换推广。这样透过自守表示理论，我们便把整个李群无限维表示理论带进数论中。

在1923年 E. Artin 猜想：如果不可约的表示

$$r:\mathrm{Gal}(\hat{Q}/Q)\to GL(n)_C$$

不是等于1，则 $L(s,r)$ 是整函数。沿着上面的想法 Langlands 证明了当 $n=2$，r 是四面体形或八面体形时 Artin 的猜想是正确的。这可以说是在 Artin 以后的第一个关于 Artin 猜想的主要工作。

Galois 群的有限维表示在代数理论中经常出现。比如当 X 是定义在 Q 上的光滑射影簇，n 是上同调空间 $H^i(X_C, Q)$ 的维数，则 X 的第 i 个 etale 上同调群便定义一个表示

$$\rho_X^i:\mathrm{Gal}(\hat{Q}/Q)\to GL(n)_C.$$

这个表示决定 X 的有理点的许多算术性质。（当 X 是椭圆曲线时 ρ_X 便是 X 的 Tate 模。）X 的余维数是 p 的子簇在 Q 上所生成的向量空间，记为 $A^p(X)$。可以构造映射

$$d_p: A^p(X)\otimes Q_l\to H_l^{2p}(\bar{X})(p).$$

d_p 的值域是以单位根挠了 p 次的 X 的 l 进 etale 上同调。另一方面，$\mathrm{Gal}(\hat{Q}/Q)$ 在 $X_{\hat{Q}}$ 上的作用诱导出表示

$$\rho^p:\mathrm{Gal}(\hat{Q}/Q)\to \mathrm{Aut}_{Q_p}(H_l^p(\bar{X})).$$

用这个表示可以定义 X 的 L 函数 $L^p(X/Q, s)$。

在1963年 Tate 猜想：对任何有限 Galois 扩张 F/Q 有

(1) $(d_{p,l}(A^p(X)\otimes Q_l))^{\mathrm{Gal}(\hat{Q}/F)}=[H_l^{2p}(\bar{X})(p)]^{\mathrm{Gal}(\hat{Q}/F)}$;

(2) $\dim_{Q_l}(H_l^{2p}(\bar{X})(p))^{\mathrm{Gal}(\hat{Q}/F)}=$ 函数 $L^p(X/F,s)$ 在极点 $s=p+1$ 的次数。

Tate 首先对 X 是椭圆曲线时证明以上的猜想。Langlands 等人用自守表示理论首先对非交换簇 X 是 Hilbert-Blumenthal 曲面

证明了 Tate 猜想。

以上表示代数闭链的 Tate 猜想与椭圆曲线理论中著名的 Birch–Swinnerton–Dyer 猜想非常接近。另一个关于椭圆曲线的著名问题是 Weil 猜想。这个猜想可以这样表达：已给 E 是定义在 $\boldsymbol{Q}$ 上的椭圆曲线，则存在 $GL(2)_A$ 的自守表示 $\pi(E)$，使得

$$L(E,s)=L\left(\pi(E),\ s-\frac{1}{2}\right).$$

当椭圆曲线有"复乘"时，Shimura 证明了 Weil 的猜想是对的。

每一个经典的模形式都决定了一个自守表示。以上比较模形式的 L 函数与代数簇的 L 函数这个方法有长久的历史，其中一个著名的例子便是 Deligne 对 Ramanujan 猜想的证明。$SL(2,\boldsymbol{Z})$ 的（除常数外）唯一的权等于12的尖模形式是

$$\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24},\quad q=^{2\pi iz},\mathrm{Im}\ z>0.$$

这个函数的 Fourier 展开式是

$$\Delta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n.$$

Ramanujan(1887—1920)猜想：$|\tau(p)|\leqslant 2p^{11/2}$。Deligne 证明这是对的。至于一般的情形，Selberg 在 1965 年发表的一篇文章提到这样的猜想：设 Γ 是 $SL(2,\boldsymbol{Z})$ 的同余子群，f 是权 $=k\geqslant 2$，特征标 $=\chi$ 的 Γ 的尖形式；如果 h 是最小的正整数，使得

$$\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\Gamma,$$

则有 $0\leqslant\alpha<1$ 使得 f 的 Fourier 展开式是

$$f(z)=\sum_{n>0}c_n e^{2\pi i((n-\alpha)/h)z}.$$

猜想是

$$c_n=O(n^{(k-1)/2+\varepsilon}).$$

尖形式所生成的向量空间的基可以用 Poincaré 级数：

$$P_m(z) = (m-a)^{k-1}\mathrm{i}^{-k}$$

$$\times \sum_{\gamma\in\{\begin{pmatrix}1 & nh\\ 0 & 1\end{pmatrix}:n\in Z\}\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)} e^{2\pi\mathrm{i}((m-a)/h)\gamma z} j(\gamma,z)^{-k},$$

其中 m 是正整数，

$$j\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, z\right) = cz + d.$$

我们有 Fourier 展开式

$$P_m(z) = \sum_{n>0} c_{n,m} e^{2\pi\mathrm{i}((n-a)/h)z},$$

其中

$$c_{n,m} = ((m-a)(n-a))^{(k-1)/2}$$

$$\times\Bigg\{\mathrm{i}^{-k}\delta_{m,n} + 2\pi \sum_{\substack{0\leqslant a<h|c|\\ 0\leqslant d<h|c|}} \overline{\chi(\gamma)}$$

$$\times \frac{e^{2\pi\mathrm{i}((m-a)a+(n-a)d)/c}}{h|c|}$$

$$\times J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{((m-a)(n-a))}}{h|c|}\right)\Bigg\}.$$

这里 J_{k-1} 是 Bessel 函数。所以对一般的 c_n 的估值的问题可以化为对 Kloostermann 和

$$S(m,n,c,\chi,\Gamma) = \sum_{\substack{0\leqslant a<h|c|\\ 0\leqslant d<h|c|}} \overline{\chi(\gamma)} e^{2\pi\mathrm{i}((m-a)a+(n-a)d)hc}$$

的估值。Ju.V.Linnik 猜想：如果 k 是偶数， $x>(m,n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$，则

$$\sum_{0<|c|<x} \frac{S(m,n,c,1,\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z}))}{|c|} = O(x^{\varepsilon}).$$

可以证明：如果 Linnik 猜想是对的，则一般的有

$$c_n = O(n^{(k-1)/2+\varepsilon}).$$

设

$$\pi^*(x,k) = \#\{\text{素数 } p\leqslant x : k\,|\,p-1, 3\nmid p-1\}.$$

Fouvry 利用 Kloostermann 和的估值证明了当 $\theta = 0.6687$ 时，

$$\sum_{x^\theta < p < x} \pi^*(x,p) \gg \frac{x}{\log x}.$$

应用 Fouvry 的结果，Adleman 和 Heath-Brown 证明：有无限个素数 p，使得 Fermat“最后定理”的第一个情形成立，即方程 $x^p + y^p = z^p$ 没有 $p \nmid xyz$ 的正整数解。另一方面，Serre 提出一个想法，就是如何证明：如果 Weil 的椭圆曲线猜想是对的，则 Fermat“最后定理”亦是对的！我们谈谈自守形式与数论的关系就到此为止。

在1986年夏初我应邀到北京大学讲自守形式理论，为此写了一份讲义。本书基本上就是这份讲义，第一、二、三章由蓝以中根据我在北京讲演整理，其余部分则全由我负责。

最后，我们对丁石孙教授和北京大学数学系的支持表示衷心的感谢。

黎景辉

1986年10月于香港中文大学

目　录

引言…………………………………………………………………（1）

第一章　GL(2, $\mathbf{R}$)的无限维表示………………………………（1）

§1　拓扑群的表示……………………………………………………（1）

§2　($\mathfrak{g}$, K)模………………………………………………………（6）

§3　可容许表示的分类……………………………………………（16）

§4　GL(2, $\mathbf{C}$)的可容许表示……………………………………（29）

习题一………………………………………………………………（31）

第二章　p 进域上 GL(2) 的无限维表示…………………………（40）

§1　完全不连通群的表示…………………………………………（40）

§2　诱导表示的结构………………………………………………（43）

§3　Jacquet 模……………………………………………………（67）

习题二………………………………………………………………（69）

第三章　Hecke 代数和 GL(2, $\mathbf{A}$)的表示…………………………（73）

§1　群代数…………………………………………………………（73）

§2　Hecke 代数($v|\infty$)………………………………………………（84）

§3　Hecke 代数($v<\infty$)………………………………………………（87）

§4　限制张量积和 $G_{\mathbf{A}}$ 的 Hecke 代数…………………………（97）

习题三………………………………………………………………（109）

第四章　自守形式…………………………………………………（113）

§1　约化理论………………………………………………………（113）

§2　自守形式………………………………………………………（122）

§3　尖形式…………………………………………………………（136）

第五章　Eisenstein 级数 …………………………………………（142）

§1　基本性质…………………………………………………………（142）
§2　截算子…………………………………………………………（151）
§3　常数项原则……………………………………………………（157）
§4　解析延拓………………………………………………………（162）

第六章　迹公式 ……………………………………………………（169）

§1　正则表示的积分核……………………………………………（169）
§2　核的轨道分解…………………………………………………（171）
§3　核的表示分解…………………………………………………（179）
§4　迹公式…………………………………………………………（189）

后记 ………………………………………………………………………（190）
参考文献…………………………………………………………………（199）
名词索引…………………………………………………………………（226）
符号索引…………………………………………………………………（229）
常用的符号 ………………………………………………………………（230）

第一章　GL(2,R)的无限维表示

本章阐述实数域上二阶全矩阵群GL(2,$\boldsymbol{R}$)和复数域上二阶全矩阵群GL(2,$\boldsymbol{C}$)的无限维表示理论。由于$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{C}$是代数数域关于其Archimede赋值的完备化域，所以本章的内容为第三章讨论一个数域的Adele环上的二阶矩阵群GL(2,$\boldsymbol{A}$)的无限维表示理论作了必要的准备。

§1　拓扑群的表示

在讨论二阶矩阵群的无限维表示理论时，我们需要经常引用拓扑群表示理论中的一些基本概念和结果。在这里，我们对此作一个综合的简单介绍(具体的证明一般从略)。

设X是一个局部紧Hausdorff空间。又设f是定义在X上的一个实或复值连续函数，令

$$\operatorname{Supp} f=\overline{\{x\in X:\ f(x)\neq 0\}}$$

(横杠表示对X的子集取闭包)，称为f的支集。以$C_c(X)$记X上具有紧支集的复连续函数所组成的$\boldsymbol{C}$上线性空间。对应于$C_c(X)$的任一非负线性函数，必存在X的测度μ，使得这个线性函数可以表达为

$$f\mapsto\int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

我们常常把这个积分记为$\mu(f)$或

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x.$$

现在设X是一个局部紧拓扑群G。G上一个非平凡正积分

μ(即$\mu(f)$不恒等于零)，如果在左平移下不变，即对所有 $f\in C_c(G)$ 和 $a\in G$，令$g(x)=f(a^{-1}x)$时，有

$$\int_G f\,\mathrm{d}\mu = \int_G g\,\mathrm{d}\mu,$$

则称μ是G上的一个左不变的Haar测度(有时简称 Haar 测度)。

关于Haar测度，有如下一个基本的事实：

命题1.1 在每个局部紧群G上至少存在一个左不变 Haar 测度μ，且除差一个实的正常数外，这样的测度是唯一的．就是说，如果G上另有一个左不变Haar 测度ν，则存在实数$c>0$，使$\nu=c\mu$。

特别地，如果G是一个紧群，那么G上的左不变Haar测度在右平移下也不变。在这种情况下，我们通常选取 Haar 测度μ，使

$$\int_G 1\,\mathrm{d}\mu = 1 \quad (\text{正规化})$$

这种Haar测度是唯一的。

设H是一个 Hilbert 空间，H上全体酉算子所组成的群记为$U(H)$。又设G是一个拓扑群，从G到$U(H)$的一个群同态ρ如果满足如下条件：从G到H的映射$g\mapsto\rho(g)x$对任意$x\in H$都是一个连续映射，则称ρ是G的一个酉表示，H称为ρ的表示空间，H的维数称为表示ρ的维数，记作$d(\rho)$。

对于局部紧群G，令$L^2(G)$表示G上(关于 Haar 测度)平方可积的函数所组成的 Hilbert 空间，定义$G\to L^2(G)$的映射R如下：取定$g\in G$，令

$$(R_g f)(h)=f(hg),\quad \forall f\in L^2(G),\ h\in G,$$

则对应：$g\mapsto R_g$是G的一个酉表示，称为G的右正则表示。类似地，

$$(L_g f)(h)=f(g^{-1}h),\quad \forall f\in L^2(G),\ h\in G$$

定义出G的另一个酉表示，称为G的左正则表示。

设ρ_1,ρ_2是拓扑群G的两个酉表示，其表示空间分别是H_1和

H_2。如果从H_1到H_2有一个保持范数的满线性映射τ，使

$$\tau\rho_1(g)=\rho_2(g)\tau,\quad \forall g\in G,$$

则称ρ_1与ρ_2等价，记作$\rho_1\cong\rho_2$。表示的等价性显然是一种等价关系。

在群表示论中，将一个表示分解为不可约表示的直和的思想起着重要的作用。读者已经在群的有限维表示论中熟知这一思想。下面对群的无限维表示介绍类似的概念和相应的结果。

设ρ是拓扑群G的一个酉表示，表示空间为H。H的一个闭线性子空间L如满足

$$\rho(g)L\subseteq L,\quad \forall g\in G,$$

则称为ρ的一个不变子空间。如果$H\neq\{0\}$，而且除$\{0\}$和H以外，没有其它不变子空间，则称ρ是G的一个不可约酉表示。

如果Hilbert空间H有一族闭线性子空间$\{H_\alpha:\alpha\in A\}$，这里A是一个指标集，而且：

(1) 子空间H_α两两正交，即$H_\alpha\perp H_\beta(\alpha\neq\beta)$，

(2) $\bigcup\limits_{\alpha\in A}H_\alpha$中元素的所有的有限线性组合组成$H$的一个稠密子集，

则称H是子空间族$\{H_\alpha\}$的(Hilbert)直和，记作

$$H=\bigoplus_{\alpha\in A}H_\alpha.$$

此时H中任一元素x可唯一地表示成

$$x=\sum_{\alpha\in A}x_\alpha,\quad x_\alpha\in H_\alpha,$$

在和式中，至多有可数个x_α不为零。此时x的范数为

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|^2。$$

如果群G的酉表示ρ的表示空间H分解为ρ的闭不变子空间族$\{H_\alpha\}$的直和：

$$H=\bigoplus_{\alpha\in A}H_\alpha,$$

ρ在H_α的限制记为ρ_α，则ρ称为酉表示$\{\rho_\alpha\}$的直和。记作

$$\rho=\bigoplus_{\alpha\in A}\rho_\alpha.$$

命题1.2 设ρ是群G的一个酉表示，如果L是表示空间H的一个闭不变子空间，则L的正交补$L^\perp$也是ρ的闭不变子空间。

将上面的概念应用到紧拓扑群上，有如下重要事实：

命题1.3 紧拓扑群G的任意酉表示都可以分解为有限维不可约酉表示的直和。特别地，紧拓扑群的任意不可约酉表示都是有限维的。

上面的命题将紧拓扑群G的酉表示的研究归结为讨论它的有限维不可约表示。设H是G的n维不可约酉表示ρ的表示空间，在H中取定一组标准正交基$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$，$\rho(g)$在这组基上对应于酉矩阵$U(g)=(u_{ij}(g))$。则$u_{ij}(g)$是$G$上平方可积函数，也就是$u_{ij}(g)\in L^2(G)$，

$$\int_G u_{ij}(g)\overline{u_{ij}(g)}\mathrm{d}g<+\infty.$$

($L^2(G)$是一个 Hilbert 空间，其内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_G f(g)\overline{h(g)}\mathrm{d}g,\quad \forall f,h\in L^2(G),$$

上面的积分为G上的正规化 Haar 积分)。

命题1.4 设ρ,ρ'是紧拓扑群G的两个不可约酉表示，$\rho(g)$和$\rho'(g)$分别表示为n阶和m阶酉矩阵$(u_{ij}(g))$，$(v_{kl}(g))$。则它们的矩阵元素关于$L^2(G)$的内积有如下正交关系：

$$\langle u_{ij},v_{kl}\rangle=\begin{cases}d(\rho)^{-1}\delta_{ik}\delta_{jl}, & 若\rho\equiv\rho';\\ 0, & 若\rho\not\equiv\rho'.\end{cases}$$

(上面$\rho\equiv\rho'$理解为ρ与ρ'等价，这时它们的酉矩阵表示总可取成相同：$U(g)=V(g)$。)

一般说，设ρ是紧拓扑群G的一个有限维酉表示，对表示空间H内任意元素u,v，内积

$$f(\rho,u,v,g)=\langle\rho(g)u,v\rangle$$

是定义在G上的复值函数，我们称它为ρ的矩阵系数。

一个拓扑群G的不可约酉表示的等价类所组成的集合称为G的对偶，记作$\hat{G}$。

对于紧拓扑群G，在$\hat{G}$的每个元素(即G的不可约表示的等价类)中选定一个代表元素$\rho_\lambda,\lambda\in\hat{G}$。在$\rho_\lambda$的表示空间中取定一组标准正交基$\varepsilon_1^\lambda,\cdots,\varepsilon_{d(\rho_\lambda)}^\lambda$，令

$$f(\lambda,i,j,g)=f(\rho_\lambda,\varepsilon_i,\varepsilon_j,g).$$

这是定义在G上的一族复值函数，属于$L^2(G)$。我们有：

命题1.5(Peter-Weyl)　函数族

$$\{f(\lambda,i,j,g):\ \lambda\in\hat{G},\ i,j=1,2,\cdots,d(\rho_\lambda)\}$$

是$L^2(G)$的一组完备正交函数系。

上面所叙述的几个命题的证明，有兴趣的读者，请参看拓扑群无限维表示理论方面的有关书籍，例如，可参看本书后面所列的参考文献中A.Weil或M.Sugiura的书。

前面所述的，都是拓扑群的酉表示。现在我们进一步介绍拓扑群的一般性的连续表示的概念。

设H是一个Hilbert空间，定义在H上的可逆有界算子组成的群记为GL(H)。又设G是一个拓扑群，从G到GL(H)的群同态$\pi: G\to \mathrm{GL}(H)$如果满足如下条件：映射$G\times H\to H$（使$(g,v)\mapsto\pi(g)v,\forall g\in G,v\in H$)是连续映射(对$H$的弱拓扑)，则$(\pi,H)$称为拓扑群$G$的连续表示，$H$称为表示空间。

拓扑群连续表示的等价性，可约(或不可约)概念等等，其定义与前面所述的酉表示的相应概念类似，不再重复。

下面看一个例子。考察群

$$SO(2,\boldsymbol{R})=\left\{h_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}: 0\leqslant\theta<2\pi\right\}$$

对任意$n\in\boldsymbol{Z}$，定义$SO(2,\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{C}$为$\pi_n(h_\theta)=e^{in\theta}$。这是$SO(2,\boldsymbol{R})$的一维不可约的酉表示。当$m\neq n$时，$\pi_m$与$\pi_n$不等价，$\{\pi_n: n\in\boldsymbol{Z}\}$为$SO(2,\boldsymbol{R})$的所有互不等价不可约酉表示的代表系，而$\{e^{in\theta}: n\in\boldsymbol{Z}\}$是$L^2(SO(2,\boldsymbol{R}))$上的一组完备正交函数系。

§2　$(\mathfrak{g},K)$模

现在我们开始讨论群$GL(2,\boldsymbol{R})$的无限维连续表示。令

$$G=GL(2,\boldsymbol{R}),\quad K=O(2,\boldsymbol{R})（二阶正交群）,\quad K^0=SO(2,\boldsymbol{R}).$$

又设$\mathfrak{k}$为K的李代数，$\mathfrak{g}$为G的李代数，$\mathfrak{g}_C=\mathfrak{g}\otimes_R\boldsymbol{C}$为$\mathfrak{g}$的复化。注意$K$是$G$的紧致李子群。

根据李群的基础理论，讨论$GL(2,\boldsymbol{R})$的表示可归结为讨论其李代数$\mathfrak{g}$的表示。在下面，我们将利用这一点来展开我们的讨论。

首先，根据有限维Hilbert空间（又称为酉空间）中的正交化方法（即从一组任意基出发来构造空间的标准正交基的逐次正交化方法），我们容易证明：$\forall g\in G$，有分解式

$$g=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l}x\in\boldsymbol{R},\\ a_1,a_2\in\boldsymbol{R}^\times\end{array}$$

且上面的分解式是唯一的。定义G的子群

$$N=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}: x\in\boldsymbol{R}\right\},$$

$$A=\left\{\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_1\end{pmatrix}: a_1,a_2\in\boldsymbol{R}^\times=\boldsymbol{R}-\{0\}\right\}.$$

则有群分解式：$G=NAK^0$。这个分解式称为G的Iwasawa分解式。

定义2.1　符号如上。一个$(\mathfrak{g},K)$模，是指一个定义在$\boldsymbol{C}$上的向量空间$\mathscr{V}$及一个映射

$$\pi:\mathfrak{g}_C\cup K\longrightarrow \mathrm{End}\mathscr{V},$$

使得：

(1) $\pi|_{\mathfrak{g}_C}$使$\mathscr{V}$成为$\mathfrak{g}_C$模，即

$$\pi([X,Y])v=\pi(X)\pi(Y)v-\pi(Y)\pi(X)v,$$

其中$X,Y\in\mathfrak{g}_C$，$v\in\mathscr{V}$；

(2) $\pi|_K$使$\mathscr{V}$成为K模；

(3) $\mathscr{V}$的每个向量都是K-有限的，即$\forall v\in\mathscr{V}$，

$$\dim_C\sum_{k\in K}C\pi(k)v<\infty;$$

(4) 若$\mathscr{V}$有一个有限维子空间W，及

$$\pi(K)\mathscr{W}\subseteq\mathscr{W},$$

则映射$K\times\mathscr{W}\to\mathscr{W}$: $(k,w)\mapsto\pi(k)w$是连续的(对$\mathscr{V}$的弱拓扑)；

(5) 若$X\in\mathfrak{k}$，$v\in\mathscr{V}$，则

$$\pi(X)v=\lim_{t\to0}\frac{\pi(\exp tX)v-v}{t};$$

(6) 若$k\in K$，$X\in\mathfrak{g}_C$，$v\in\mathscr{V}$，则

$$\pi(\mathrm{Ad}(k)X)v=\pi(k)\pi(X)\pi(k)^{-1}v,$$

其中Ad为伴随表示。

上面所定义的$(\mathfrak{g},K)$模记作$(\pi,\mathscr{V})$。

设$(\pi,\mathscr{V})$，$(\pi',\mathscr{V}')$是群K的两个表示，令

$$\mathrm{Hom}_K(\pi,\pi')=\{L:\mathscr{V}\to\mathscr{V}': L\text{为线性，连续映射，}\\ \text{且}\forall k\in K,\ \pi'(k)L=L\pi(k)\}.$$

取定一个$(\mathfrak{g},K)$模$(\pi,\mathscr{V})$，对于K的任意一个不可约表示$(\delta,\mathscr{V}_\delta)$，定义

$$\mathscr{V}_K(\delta)=\sum_{L\in\mathrm{Hom}(\delta,\pi)}L(\mathscr{V}_\delta),$$

如果对K的所有不可约表示$(\delta,\mathscr{V}_\delta)$，都有

$$\dim\mathscr{V}_K(\delta)<\infty,$$

则称$(\pi,\mathscr{V})$是可容许的$(\mathfrak{g},K)$模。

在本节和下一节中，我们采用初等的方法来详细地研讨$(\mathfrak{g},$

K)模的结构和分类问题。

引理2.1 设$(\pi,\mathscr{V})$是一个$(\mathfrak{g},K)$模，对$n\in \boldsymbol{Z}$，我们定义

$$\mathscr{V}_n=\{v\in\mathscr{V}: \pi(k_\theta)v=e^{in\theta}v\},$$

其中

$$k_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

则$\mathscr{V}$可分解为子空间$\mathscr{V}_n$的直和：

$$\mathscr{V}=\sum_{n\in \boldsymbol{Z}}\mathscr{V}_n.$$

证 对任意$v\in\mathscr{V}$，因为v是K-有限的，于是存在一个K模$\boldsymbol{\mathscr{V}}$，使$v\in\boldsymbol{\mathscr{V}}\subseteq\mathscr{V}$，而且$\dim\boldsymbol{\mathscr{V}}<\infty$。$\boldsymbol{\mathscr{V}}$作为$K$模是完全可约的，它可以分解为不可约子模的直和：$\boldsymbol{\mathscr{V}}=\sum\boldsymbol{\mathscr{V}}_n$(其中$\boldsymbol{\mathscr{V}}_n$为等价不可约子模的直和，对应于$K$的不可约表示$\pi_n(k_\theta)w=e^{in\theta}w$，$w\in\boldsymbol{\mathscr{V}}_n$)。显然有$\boldsymbol{\mathscr{V}}_n\subseteq\mathscr{V}_n$，故

$$v\in\sum_{n\in \boldsymbol{Z}}\mathscr{V}_n.$$

这表明$\mathscr{V}$分解为$\{\mathscr{V}_n\}$的直和。 ▎

下面，我们来构造一个重要的$(\mathfrak{g},K)$模，它在后面的讨论中将起重要的作用。

非零实数的乘法群$\boldsymbol{R}^\times$的一维不可约表示μ(不一定是酉表示)称为$\boldsymbol{R}^\times$的一个特征标（或者说，称为“拟特征标”，即 quasi-characters)。

定义2.2 取$\boldsymbol{R}^\times$的两个特征标μ_1,μ_2，设

$$\mu_j(t)=|t|^{s_j}(t/|t|)^{m_j},\quad \forall t\in\boldsymbol{R}^\times,$$

这里$s_j\in\boldsymbol{C}$，$m_j\in\{0,1\}$。令$\mathscr{I}=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$为满足下列两个条件的光滑函数$\phi: G\to\boldsymbol{C}$所组成的向量空间：

(1) $\phi\left(\begin{pmatrix}a_1 & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}g\right)=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\dfrac{a_1}{a_2}\right|^{1/2}\phi(g)$,

其中 $g\in G$，$a_1,a_2\in \boldsymbol{R}^\times$，$x\in \boldsymbol{R}$；

(2) ϕ是右K^0-有限的，即令$\phi^k(g)=\phi(gk)(k\in K^0,g\in G)$，则

$$\dim\sum_{k\in K^0} \boldsymbol{C}\phi^k<\infty.$$

从 $\mu_j(t)$的定义立即可知：如令 $m=|m_1-m_2|$，$s=s_1-s_2$，则

$$\mu_1\mu_2^{-1}(t)=|t|^s(t/|t|)^m.$$

现在定义映射 $\rho:\mathfrak{g}_C\cup K\longrightarrow \mathrm{End}_C\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$如下：

(1) 对$k\in K$，$\phi\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，令

$$\rho(k)\phi(g)=\phi(gk),\quad \forall g\in G;$$

(2) 对 $X\in\mathfrak{g}$，令

$$\rho(X)\phi(g)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(g\exp tX)|_{t=0}.$$

令 n是一个与$m=|m_1-m_2|$有相同奇偶性的整数，定义G上函数ϕ_n如下：

$$\phi_n\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right)$$

$$=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{1/2}\cdot e^{in\theta}.$$

我们有

引理2.2 符号如上。

(1) 任一 $\phi\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$由 $\phi|_{K^0}$唯一决定；

(2) $\{\phi_n: n\equiv m(\mathrm{mod}2)\}$是 $\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$的一组基；

(3) $(\rho,\mathscr{I})$是一个可容许的$(\mathfrak{g},K)$模。

证 (1) 我们有G的 Iwasawa 分解：$G=NAK^0$。对任意 $g\in G$，有

$$\phi(g)=\phi\left(\begin{pmatrix}a_1 & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}k_\theta\right)=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{1/2}\cdot\phi(k_\theta).$$

(2) 对任意 $k\in K^0$，我们有

$$\phi(-k)=\phi\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}k\right)=\mu_1(-1)\mu_2(-1)\phi(k)$$
$$=(-1)^m\phi(k).$$

当 m 为偶数时，$\phi(k)$ 为偶函数；反之为奇函数。按照 Fourier 级数的理论，$\{\phi_n(k): n\equiv m(\mathrm{mod}2)\}$ 是 $\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$ 限制在 K^0 上的一组正交基，再根据 $\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$ 定义中的条件(1)就可推知 $\{\phi_n\}$ 是 $\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$ 的一组基了。

(3) 考虑 $B=NA$（作为 G 的子群）的一维表示：

$$\begin{pmatrix}a_1 & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\longmapsto\mu_1(a_1)\mu_2(a_2).$$

它诱导出 G 的表示 $\mathrm{Ind}_H^G(\mu_1,\mu_2)$。李群 G 的这个表示又诱导出其李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示，这个表示就是 ρ。故 $\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$ 是一个 $\mathfrak{g}$ 模。又根据 $\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$ 定义中的条件(2)可知 $\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$ 的每个向量都是 K-有限的。由此，不难证明 $(\rho,\mathscr{I})$ 是一个可容许的 $(\mathfrak{g},K)$ 模，详细的验证此处从略。∎

在 $\mathfrak{g}_c$ 中取如下元素：

$$W=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad V_+=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix},\quad V_-=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & -1\end{pmatrix},$$

$$X_+=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad X_-=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad Z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \iota=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

又在 $\mathfrak{g}_c$ 的通用包络代数 $\mathfrak{U}$ 中取

$$C=X_+X_-+X_-X_++\frac{1}{2}Z^2.$$

我们有

引理2.3 以下公式成立：

(1) $\rho(W)\phi_n=in\phi_n$；

(2) $\rho(V_+)\phi_n=(s+1+n)\phi_{n+2}$;

(3) $\rho(V_-)\phi_n=(s+1-n)\phi_{n-2}$;

(4) $\rho(C)\phi_n=\dfrac{1}{2}(s^2-1)\phi_n$;

(5) $\rho(I)\phi_n=(s_1+s_2)\phi_n$.

证 (1) 因为$\exp(tW)=k_t$。所以，按ρ的定义，有

$$\rho(W)\phi_n(g)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_n(g\exp tW)\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_n(gk_t)\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_n\left(\begin{pmatrix}a_1 & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta+t) & \sin(\theta+t)\\ -\sin(\theta+t) & \cos(\theta+t)\end{pmatrix}\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta+t)}\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_n(g)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt})\Big|_{t=0}=\mathrm{i}n\phi_n(g).$$

(2) 我们有

$$[W,V_+]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=2\mathrm{i}V_+.$$

因为$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$是$\mathfrak{g}_C$模，所以

$$\begin{aligned}\rho(W)\rho(V_+)\phi_n&=\rho(V_+)\rho(W)\phi_n+\rho[W,V_+]\phi_n\\&=\mathrm{i}n\rho(V_+)\phi_n+2\mathrm{i}\rho(V_+)\phi_n\\&=\mathrm{i}(n+2)\rho(V_+)\phi_n.\end{aligned}$$

由此立得(参看(1)的结果)

$$\rho(V_+)\phi_n=a_n\phi_{n+2},\qquad a_n\in\boldsymbol{C}.$$

注意到$\phi_{n+2}(I)=1$（I为G的单位元素，即二阶单位矩阵），故

$$a_n=(\rho(V_+)\phi_n(g))\big|_{g=I}.$$

另一方面，我们有

$$\rho(X_+)\phi_n(g)|_{g=I} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\phi_n(\exp tX_+) - \phi_n(I)]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\phi_n\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \phi_n(I)\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(1-1) = 0.$$

$$\rho(Z)\phi_n(g)|_{g=I} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\phi_n(\exp tZ) - \phi_n(I)]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\phi_n\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix} - 1\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\mu_1(e^t)\mu_2(e^{-t})\cdot e^t - 1]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[e^{t(s+1)} - 1]$$

$$= s+1.$$

由于

$$V_+ = Z - iW + 2iX_+.$$

故

$$\begin{aligned}&\rho(V_+)\phi_n(g)|_{g=I}\\ &\quad = \rho(Z)\phi_n(g)|_{g=I} - i\rho(W)\phi_n(g)|_{g=I}\\ &\qquad + 2i\rho(X_+)\phi_n(g)|_{g=I}\\ &\quad = (s+1) - i\cdot in + 0 = s+1+n.\end{aligned}$$

(3) 我们有

$$[W, V_-] = -2iV_-,$$

仿照(2)的证明作计算就得出所要的结果。

(4) 我们有

$$Z = \frac{1}{2}(V_+ + V_-),$$

$$X_+ = \frac{1}{2}W - \frac{i}{4}V_+ + \frac{i}{4}V_-.$$

$$X_- = -\frac{1}{2}W - \frac{\mathrm{i}}{4}V_+ + \frac{\mathrm{i}}{4}V_-.$$

代入C的表达式，化简后，得

$$C = -\frac{1}{2}W^2 + \frac{1}{4}(V_+V_- + V_-V_+).$$

故

$$\begin{aligned}
\rho(C)\phi_n &= -\frac{1}{2}\rho(W^2)\phi_n + \frac{1}{4}(\rho(V_+V_-)\phi_n + \rho(V_-V_+)\phi_n) \\
&= \frac{n^2}{2}\phi_n + \frac{1}{4}(\rho(V_+)(s+1-n)\phi_{n-2} \\
&\quad + \rho(V_-)(s+1+n)\phi_{n+2}) \\
&= \frac{n^2}{2}\phi_n + \frac{1}{4}[(s+1-n)(s+1+n-2) \\
&\quad + (s+1+n)(s+1-n-2)]\phi_n \\
&= \frac{1}{2}(s^2-1)\phi_n.
\end{aligned}$$

(5) 因为I属于$\mathfrak{g}_C$的中心，$\rho(I)$与$\rho(W)$可交换，应有$\rho(I)\phi_n = b_n\phi_n (b_n \in \mathbf{C})$。显然有

$$\begin{aligned}
b_n = \rho(I)\phi_n(g)|_{g=I} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\phi_n(\exp tI) - \phi_n(I)] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\phi_n\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} - 1\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\mu_1(\mathrm{e}^t)\mu_2(\mathrm{e}^t) - 1] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\mathrm{e}^{t(s_1+s_2)} - 1] \\
&= s_1 + s_2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

现在，将引理2.3应用于$(\rho, \mathscr{I})$的讨论，我们有

引理2.4 符号如上。

(1) 若$s-m$不是奇整数，则$\mathscr{I}=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$是不可约$\mathfrak{g}_C$模；

(2) 若$s-m$是奇整数，且$s\geqslant 0$，则$\mathscr{I}$只有下列真子$\mathfrak{g}_C$模：

$$\mathscr{I}_1=\sum_{\substack{n\geq s+1\\ n\equiv s+1(\mathrm{mod}\,2)}} C\phi_n,\quad \mathscr{I}_2=\sum_{\substack{n\leq -s-1\\ n\equiv s+1(\mathrm{mod}\,2)}} C\phi_n$$

及$\mathscr{I}_\sigma=\mathscr{I}_1+\mathscr{I}_2$(如果它与$\mathscr{I}$不同)；

(3) 若$s-m$是奇整数，且$s<0$，则只有下列真子$\mathfrak{g}_C$模：

$$\mathscr{I}_1=\sum_{\substack{n\geq s+1\\ n\equiv s+1}} C\phi_n,\quad \mathscr{I}_2=\sum_{\substack{n\leq -s-1\\ n\equiv s+1(\mathrm{mod}\,2)}} C\phi_n$$

及$\mathscr{I}_f=\mathscr{I}_1\cap\mathscr{I}_2$。

证 根据引理2.3，我们有

$$\rho(V_+)^p\phi_n=(s+1+n)\cdots(s+2p-1+n)\phi_{n+2p},$$

$$\rho(V_-)^p\phi_n=(s+1-n)\cdots(s+2p-1-n)\phi_{n-2p}.$$

(1) 若$s-m$非奇整数，则$(s+2p-1\pm n)\neq 0$，此时$\rho(V_+)^p\phi_n$及$\rho(V_-)^p\phi_n$(对某个固定的$n\in\boldsymbol{Z}$，$n\equiv m(\mathrm{mod}\ 2)$)生成$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，故$\mathscr{I}$为不可约$\mathfrak{g}_C$模。

(2) 若$s-m$为奇整数，$s\geqslant 0$，则显见有(因$s+1$及$-s-1\equiv m(\mathrm{mod}2)$)

$$\rho(V_-)\phi_{s+1}=0,\qquad \rho(V_+)\phi_{-s-1}=0,$$

故有命题所说的结论。

(3) 若$s-m$为奇整数，$s<0$，则同样有

$$\rho(V_-)\phi_{s+1}=\rho(V_+)\phi_{-s-1}=0.$$

注意此时$s+1\leqslant -s-1$，故有命题所说的结论。▌

现在我们进一步把$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$看作$(\mathfrak{g},K)$模。此时需要考虑K在$\mathscr{I}$上的作用。把

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

看作K的元素，按定义，应有

$$\begin{aligned}
\rho(\varepsilon)\phi_n(g) &= \phi_n(g\varepsilon) \\
&= \phi_n\left(\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \phi_n\left(\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}\right) \\
&= \phi_n\left(\begin{pmatrix} -a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}\right) \\
&= \mu_1(-a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{1}{2}} e^{-in\theta} \\
&= \mu_1(-1)\left(\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{1}{2}} e^{-in\theta}\right) \\
&= (-1)^{m_1}\phi_{-n}(g).
\end{aligned}$$

同理，不难证明：$\forall k_\theta \in K^0$，我们有 $\rho(k_\theta)\phi_n = e^{in\theta}\phi_n$。由此可知：在引理 2.4 的(2)中，唯有$\mathscr{I}_\sigma = \mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2$ 才是 $(\mathfrak{g},K)$ 子模，它由$\{\cdots,\phi_{-s-3},\phi_{-s-1},\phi_{s+1},\phi_{s+3},\cdots\}$生成.而当$s=0$时，$\mathscr{I}_\sigma=\mathscr{I}$. 当 $s>0$ 时，$\mathscr{I}_\sigma$ 是真 $(\mathfrak{g},K)$ 子模。在引理 2.4 的 (3) 中，唯有 $\mathscr{I}_f = \mathscr{I}_1 \cap \mathscr{I}_2$ 才是真 $(\mathfrak{g},K)$子模，它由 $\{\phi_{s+1},\phi_{s+3},\cdots,\phi_{-s-3},\phi_{-s-1}\}$生成。

综合上面的讨论，我们得到如下的结论。

定理2.5 设μ_1,μ_2是$\boldsymbol{R}^\times$的特征。

(1) 若$\mu_1\mu_2^{-1}(t)\neq t^s\cdot\mathrm{sign}t$，其中$s$为非零整数，则$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$为不可约$(\mathfrak{g},K)$模。此时，我们以$\pi(\mu_1,\mu_2)$记任一个与 $(\rho,\mathscr{I})$ 等价的$(\mathfrak{g},K)$模。

(2) 若$\mu_1\mu_2^{-1}(t)=t^s\mathrm{sign}t$，$s$为正整数。则$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$含有唯一的真子$(\mathfrak{g},K)$模$\mathscr{I}_\sigma$。且$\mathscr{I}_\sigma$为不可约$(\mathfrak{g},K)$模。令

$$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)/\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2),$$

则$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)$是有限维的不可约$(\mathfrak{g},K)$模，以$\sigma(\mu_1,\mu_2)$记任一与$\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$等价的$(\mathfrak{g},K)$模，而以$\pi(\mu_1,\mu_2)$记任一与$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)$等

价的$(\mathfrak{g},K)$模。

(3) 若$\mu_1\mu_2^{-1}(t)=t^s\operatorname{sign}t$，$s$为负整数。则$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$含有唯一的真子$(\mathfrak{g},K)$模$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)$，它不可约而且维数有限，我们也以$\pi(\mu_1,\mu_2)$记任意一个与$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)$等价的$(\mathfrak{g},K)$模。又令

$$\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)/\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2),$$

以$\sigma(\mu_1,\mu_2)$记任意一个与$\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$等价的不可约$(\mathfrak{g},K)$模。

由$\pi(\mu_1,\mu_2)$所概括的一系列不可约$(\mathfrak{g},K)$模，我们称为群$G=\mathrm{GL}_2(2,\boldsymbol{R})$的主序列，而$\sigma(\mu_1,\mu_2)$则称为离散序列，且后者仅在$\mu_1\mu_2^{-1}(t)=t^s\operatorname{sign}t$(对某个非零整数$s$)时才会出现。

从上面的讨论中自然引伸出如下一个问题：在主序列表示$\pi(\mu_1,\mu_2)$，离散序列表示$\sigma(\mu_1,\mu_2)$之间，是否存在某些等价关系？我们用下面的定理来回答这个问题。

定理2.6 假设同上。

(1) 表示$\pi(\mu_1,\mu_2)$与表示$\sigma(\mu'_1,\mu'_2)$不等价；

(2) 表示$\pi(\mu_1,\mu_2)$与$\pi(\mu_1,\mu'_2)$等价的充分必要条件是

$$(\mu_1,\mu_2)=(\mu'_1,\mu'_2)\text{ 或 }(\mu_1,\mu_2)=(\mu'_2,\mu'_1).$$

(3) 表示$\sigma(\mu_1,\mu_2)$与$\sigma(\mu'_1,\mu'_2)$等价的充分必要条件是(μ_1,μ_2)为下列四种情况之一：(μ'_1,μ'_2)，(μ'_2,μ'_1)，$(\mu'_1\eta,\mu'_2\eta)$，$(\mu'_2\eta,\mu'_1\eta)$，这里$\eta(t)=\operatorname{sign}t$。

这个定理的证明需要作较长的讨论，此处从略。

§3 可容许表示的分类

本节的目的，是证明任意一个可容许的不可约$(\mathfrak{g},K)$模，都和§2中构造出来的两大类不可约$(\mathfrak{g},K)$模$\pi(\mu_1,\mu_2)$及$\sigma(\mu_1,\mu_2)$中的某一个等价。

设已给可容许不可约$(\mathfrak{g},K)$模$(\pi,\mathscr{V})$，如果对$\mathfrak{g}_C$内

$$W=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},$$

$$V_+ = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad V_- = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

及$\mathfrak{g}_c$的通用包络代数$\mathfrak{U}$内的

$$C = X_+X_- + X_-X_+ + \frac{1}{2}Z^2 = \frac{1}{2}V_-V_+ - \mathrm{i}W - \frac{1}{2}W^2,$$

和K内的

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

在$\mathscr{V}$内存在一组基$\{v_n\}$，使

(1) $\pi(W)v_n = \mathrm{i}nv_n$;

(2) $\pi(V_+)v_n = (s+1+n)v_{n+2} \quad (s \in \boldsymbol{C})$;

(3) $\pi(V_-)v_n = (s+1-n)v_{n-2} \quad (s \in \boldsymbol{C})$;

(4) $\pi(I)v_n = (s_1+s_2)v_n \quad (s_1, s_2 \in \boldsymbol{C})$;

(5) $\pi(C)v_n = \frac{1}{2}(s^2-1)v_n \quad (s \in \boldsymbol{C})$;

(6) $\pi(\varepsilon)v_n = (-1)^{m_1}v_{-n} \quad (m_1 \in \boldsymbol{Z})$;

(7) $\pi(k_\theta)v_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}v_n$.

我们容易证明$(\pi, \mathscr{V})$与$\pi(\mu_1,\mu_2)$及$\sigma(\mu_1,\mu_2)$中某一个等价。

现在设$(\pi, \mathscr{V})$是可容许不可约$(\mathfrak{g}, K)$模。根据引理2.1，有

$$\mathscr{V} = \sum_{n \in Z} \mathscr{V}_n,$$

其中

$$\mathscr{V}_n = \{v \in \mathscr{V}: \ \pi(k_\theta)v = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}v\}.$$

W属于K^0的李代数。根据$(\mathfrak{g}, K)$模定义的条件(5)，有

$$\mathscr{V}_n = \{v \in \mathscr{V}: \ \pi(W)v = \mathrm{i}nv\}.$$

下面我们通过一系列引理来证明上面提出的结论。

引理3.1 符号如上。

(1) $\pi(V_\pm)^q \mathscr{V}_n \subseteq \mathscr{V}_{n \pm 2q}$;

(2) 如果$\mathscr{V}_n\neq\{0\}$，则$\{0\}\neq\pi(\varepsilon)\mathscr{V}_n\subseteq\mathscr{V}_{-n}$；

证 (1) 在$\mathfrak{g}_C$内，有

$$[W,V_\pm]=\pm 2\mathrm{i}V_\pm,$$

而在$\mathfrak{g}_C$的通用包络代数$\mathfrak{U}$内，有

$$WV_\pm=V_\pm W+[W,V_\pm].$$

所以，对$v\in\mathscr{V}_n$，有

$$\begin{aligned}\pi(W)\pi(V_\pm)v&=\pi(V_\pm)\pi(W)v\pm 2\mathrm{i}\pi(V_\pm)v\\&=\mathrm{i}(n\pm 2)\pi(V_\pm)v\implies\pi(V_\pm)v\in\mathscr{V}_{n\pm 2}.\end{aligned}$$

这表明命题在$q=1$时成立。应用数学归纳法，由于

$$\begin{aligned}\pi(W)\pi(V_\pm)^{q+1}v&=\pi(W)\pi(V_\pm)(\pi(V_\pm)^q v)\\&=\pi(V_\pm)\pi(W)(\pi(V_\pm)^q v)\\&\quad\pm 2\mathrm{i}\pi(V_\pm)(\pi(V_\pm)^q v)\\&=\mathrm{i}(n\pm 2(q+1))\pi(V_\pm)^{q+1}v.\end{aligned}$$

由此即知

$$\pi(V_\pm)^{q+1}v\in\mathscr{V}_{n\pm 2(q+1)}.$$

(2) 取 $v\in\mathscr{V}_n$. $\varepsilon\in K$，$\pi(\varepsilon)$可逆。根据$(\mathfrak{g},K)$模定义中的条件(6)，有（注意$\varepsilon^2=\mathrm{id}$，故$\pi(\varepsilon)^{-1}=\pi(\varepsilon)$）

$$\pi(\mathrm{Ad}(\varepsilon)W)=\pi(\varepsilon)\pi(W)\pi(\varepsilon)^{-1}.$$

按李群伴随表示的定义，有

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{Ad}(\varepsilon)W)&=\varepsilon(\exp W)\varepsilon^{-1}=\exp(\varepsilon W\varepsilon^{-1})\\&=\exp(-W),\end{aligned}$$

即$\mathrm{Ad}(\varepsilon)W=-W$，故

$$\pi(\varepsilon)\pi(W)=-\pi(W)\pi(\varepsilon).$$

于是

$$\pi(W)(\pi(\varepsilon)v)=-(\pi(\varepsilon)\pi(W))v=-\mathrm{i}n(\pi(\varepsilon)v).$$

即$\pi(\varepsilon)v\in\mathscr{V}_{-n}$。如果$\pi(\varepsilon)\mathscr{V}_n=\{0\}$，那么

$$\{0\}=\pi(\varepsilon)\pi(\varepsilon)\mathscr{V}_n=\mathscr{V}_n,$$

这与$\mathscr{V}_n\neq\{0\}$矛盾。

引理3.2 $\pi(C)$在$\mathscr{V}$的作用是乘纯量。

证 设$\mathscr{V}_n\neq\{0\}$。取$v\in\mathscr{V}_n$，$v\neq 0$，则

$$\pi(W)\pi(C)v=\pi(C)\pi(W)v=in\pi(C)v,$$

故$\pi(C)\mathscr{V}_n\subseteq\mathscr{V}_n$。因为$(\pi,\mathscr{V})$是可容许$(\mathfrak{g},K)$模，$\mathscr{V}_n$维数有限，且$\mathscr{V}_n\neq\{0\}$，从而$\pi(C)$至少有一个特征子空间，设为$\mathscr{V}_c$，设它对应于$\pi(C)$的特征值$c$。取$u\in\mathscr{V}_c$，我们有$(\forall X\in\mathfrak{g})$

$$\pi(C)\pi(X)u=\pi(X)\pi(C)u=c\pi(X)u,$$

即$\pi(X)u\in\mathscr{V}_c$。另一方面，我们又有$(\forall k\in K)$

$$\pi(C)\pi(k)u=\pi(k)\pi(C)u=c\pi(k)u,$$

即$\pi(k)u\in\mathscr{V}_c$。从而$\mathscr{V}_c$是$(\mathfrak{g},K)$子模。但$\mathscr{V}$不可约，而$\mathscr{V}_c\neq\{0\}$，故$\mathscr{V}_c=\mathscr{V}$。这表明$\pi(C)$的作用相当于乘纯量$c$。▎

我们取$s\in\mathbf{C}$，使$c=\frac{1}{2}(s^2-1)$，即$\forall v\in\mathscr{V}$，$\pi(C)v=\frac{1}{2}(s^2-1)v$，则有

引理3.3 (1) $\pi(I)$在$\mathscr{V}$的作用是乘纯量；

(2) 对$v\in\mathscr{V}_n$，有$\pi(V_\pm)\pi(V_\mp)v=[s^2-(n\mp 1)^2]v$。

证 (1) 因为I属于$\mathfrak{U}$的中心，故$\pi(I)$与$\pi(X)$及$\pi(k)$ $(\forall \boldsymbol{X}\in\mathfrak{g}_{\boldsymbol{C}},k\in K)$可交换。按引理3.2的办法，容易证明$\pi(I)$在$\mathscr{V}$的作用是乘纯量。

(2) 设$s\in\mathbf{C}$，使

$$\pi(C)v=\frac{1}{2}(s^2-1)v\quad(\forall v\in\mathscr{V})。$$

因为

$$C=-\frac{1}{2}W^2+iW+\frac{1}{2}V_+V_-,$$

故对$v\in\mathscr{V}_n$，有

$$\begin{aligned}\pi(V_+)\pi(V_-)v&=[2\pi(C)+\pi(W)^2-2i\pi(W)]v\\&=(s-1)^2p-n^2v+2nv=[s^2-(n-1)^2]v。\end{aligned}$$

又因为C又可表作

$$C=-\frac{1}{2}W^2-iW+\frac{1}{2}V_-V_+,$$

同理可得$\pi(V_-)\pi(V_+)v=[s^2-(n+1)^2]v$。 ▎

引理3.4　对$v\in\mathscr{V}_n$，定义

$$\mathscr{V}'=\sum_{q>0}C\pi(V_+)^q v+\sum_{q>0}C\pi(V_-)^q v,$$

$$\mathscr{V}^0=\mathscr{V}'+\pi(\varepsilon)\mathscr{V}'.$$

则$\mathscr{V}^0$是$\mathscr{V}$的$(\mathfrak{g},K)$子模。

证　因为$\mathfrak{g}_C$由I,W,V_+,V_-的复系数线性组合生成。由引理3.1，

$$\pi(V_+)^q v\in\mathscr{V}_{n+2q},\quad \pi(V_-)^q v\in\mathscr{V}_{n-2q},$$

再根据引理3.3，即可知$\mathscr{V}'$是一个$\mathfrak{g}_C$模(即在$\pi(\mathfrak{g}_C)$作用下不变)。

下面考察K^0在$\mathscr{V}'$上的作用。按$(\mathfrak{g},K)$模定义中的条件(6)，我们已知

$$\mathscr{V}_n=\{v\in\mathscr{V}:\ \pi(k_\theta)v=e^{in\theta}v\}.$$

又按引理3.1，有

$$\pi(V_\pm)^q\mathscr{V}_n\subseteq\mathscr{V}_{n\pm2q},$$

由此易知

$$\pi(k_\theta)\pi(V_+)^q v=e^{i(n\pm2q)}\pi(V_\pm)^q v.$$

故$\mathscr{V}'$是$\pi(k_\theta)$的不变子空间。在证明引理3.1时已导出

$$\pi(W)\pi(\varepsilon)=-\pi(\varepsilon)\pi(W),$$

同理有

$$\pi(V_+)\pi(\varepsilon)=\pi(\varepsilon)\pi(V_-),\ \pi(V_-)\pi(\varepsilon)=\pi(\varepsilon)\pi(V_+).$$

又由$\pi(\varepsilon)^2=\mathrm{id}$及引理3.3，即知$\mathscr{V}^0=\mathscr{V}'+\pi(\varepsilon)\mathscr{V}'$是$(\mathfrak{g},K)$子模。 ▎

引理3.5　对$q\geqslant1$及$v_+\in\mathscr{V}_n$，$v_-\in\mathscr{V}_{-n}$，有

$$\pi(V_\pm)^q\pi(V_\mp)v_\mp=\pi(V_\mp)\pi(V_\pm)^q v_\mp-4[n+(n-2)+\cdots+(n-2(q-1))]\pi(V_\pm)^{q-1}v_\mp.$$

证　对q作数学归纳法。当$q=1$时，有

$$\begin{aligned}\pi(V_+)\pi(V_-)v_-&=\pi(V_-)\pi(V_+)v_-+\pi([V_+,V_-])v_-\\&=\pi(V_-)\pi(V_+)v_--4i\pi(W)v_-\end{aligned}$$

$$= \pi(V_-)\pi(V_+)v_- - 4nv_-.$$

设命题对 q 成立。则

$$\pi(V_+)^{q+1}\pi(V_-)v_- = \pi(V_+)(\pi(V_+)^q\pi(V_-)v_-)$$
$$= \pi(V_+)[\pi(V_-)\pi(V_+)^q v_-$$
$$- 4[n + (n-2) + \cdots + (n-2(q-1))]\pi(V_+)^{q-1}v_-]$$
$$= \pi(V_-)\pi(V_+)^{q+1}v_- - 4\mathrm{i}\pi(W)\pi(V_+)^q v_-$$
$$- 4[n + (n-2) + \cdots + (n-2(q-1))]\pi(V_+)^q v_-.$$

根据引理3.1，$\pi(V_+)^q v_- \in \mathscr{V}_{-n+2q}$，故

$$- 4\mathrm{i}\pi(W)\pi(V_+)^q v_- = - 4\mathrm{i}^2(2q-n)\pi(V_+)^q v_-,$$

代回原式，即得

$$\pi(V_+)^{q+1}\pi(V_-)v_- = \pi(V_-)\pi(V_+)^{q+1}v_- - 4[n + (n-2)$$
$$+ \cdots + (n-2(q-1)) + (n-2q)]\pi(V_+)^q v_-.$$

同理可证

$$\pi(V_-)^q\pi(V_+)v_+ = \pi(V_+)\pi(V_-)^q v_+ - 4[n + (n-2)$$
$$+ \cdots + (n-2(q-1))]\pi(V_-)^{q-1}v_+. \quad \blacksquare$$

定理3.6 任意可容许的不可约$(\mathfrak{g},K)$模$(\pi,\mathscr{V})$等价于$\pi(\mu_1,\mu_2)$或$\sigma(\mu_1,\mu_2)$之一。

证 我们已知有

$$\mathscr{V} = \sum_{n\in \mathbf{Z}}\mathscr{V}_n, \qquad \mathscr{V}_n = \{v\in\mathscr{V}:\ \pi(W)v = \mathrm{i}nv\}.$$

设

$$N = \{n\in\mathbf{Z}:\ \mathscr{V}_n \neq \{0\}\}.$$

那么，有以下五种可能的情况：

(A) $\forall n\in N$，$\forall v\in\mathscr{V}_n - \{0\}$，有 $\pi(V_+)v\neq 0$，$\pi(V_-)v\neq 0$.

(B) $\exists n<0$，使 $\exists v\in\mathscr{V}_n - \{0\}$，而 $\pi(V_+)v = 0$.

(C) $\exists n\geqslant 0$，使 $\exists v\in\mathscr{V}_n - \{0\}$，而 $\pi(V_+)v = 0$.

(D) $\exists n>0$，使 $\exists v\in\mathscr{V}_n - \{0\}$，而 $\pi(V_-)v = 0$.

(E) $\exists n\leqslant 0$，使 $\exists v\in\mathscr{V}_n - \{0\}$，而 $\pi(V_-)v = 0$.

下面分别对这五种情况进行讨论。

情况(A)。此时我们有

引理3.7 在(A)的条件下，有下列结论：

(1) $\forall n\in N$，$\exists v\in\mathscr{V}_n$，使 $\pi(V_+)\pi(V_\mp)v\neq 0$；

(2) $N=\{n\in \boldsymbol{Z}: n\equiv j(\mathrm{mod}2),\ j=0$或$1\}$。

证 (1) 设 $n\in N$，取 $v\in\mathscr{V}_n$，使 $\pi(V_-)v\neq 0$。此时，$\pi(V_-)v\in\mathscr{V}_{n-2}$，所以 $n-2\in N$，因此，$\pi(V_+)\pi(V_-)v\neq 0$。即有 $0\neq v\in\mathscr{V}_n$，使 $\pi(V_+)\pi(V_-)v\neq 0$。同理

$$\pi(V_-)\pi(V_+)v\neq 0.$$

(2) $\mathscr{V}\neq\{0\}$，故N非空。设 $n\in N$，取 $0\neq v\in\mathscr{V}_n$，按假设条件，对任意正整数 q，有(参看引理 3.1)

$$0\neq\pi(V_\pm)^q v\in\mathscr{V}_{n\pm 2q},$$

故 $n\pm 2q\in N$。但 $N\neq\boldsymbol{Z}$，否则，按引理 3.1—3.4 的结论可知

$$\sum_{n\equiv 0(\mathrm{mod}2)}\mathscr{V}_n,\qquad \sum_{n\equiv 1(\mathrm{mod}2)}\mathscr{V}_n$$

都是真$(\mathfrak{g},K)$子模，这与$\mathscr{V}$不可约矛盾。在N中取最小非负整数 j，则 $j=0$或1，且

$$N=\{n\in\boldsymbol{Z}: n\equiv j(\mathrm{mod}2)\}. \quad \blacksquare$$

引理3.8 $\forall v\in\mathscr{V}$，设 $\pi(C)v=cv\,(c\in\boldsymbol{C})$。取 $s\in\boldsymbol{C}$，使

$$c=\frac{1}{2}(s^2-1).$$

则在情况(A)的条件下，对所有 $n\in N$，$s\neq\pm(n\pm 1)$。

证 根据引理3.3，对 $v\in\mathscr{V}_n$，有

$$\pi(V_\pm)\pi(V_\mp)v=[s^2-(n\mp 1)^2]v.$$

根据引理3.7，此时可选取 $v\in\mathscr{V}_n$，使 $\pi(V_\pm)\pi(V_\mp)v\neq 0$，从而

$$[s+(n\mp 1)][s-(n\mp 1)]\neq 0. \quad \blacksquare$$

现在我们取定 $0\neq v_j\in\mathscr{V}_j$。对 $n\geqslant 2$，设 v_{n-2} 已取定，则令

$$v_n=\frac{1}{(s+1+(n-2))}\pi(V_+)v_{n-2}\neq 0;$$

若 $n\leqslant -1$，设 v_{n+2}已取定，则令

$$v_n = \frac{1}{(s+1-(n+2))}\pi(V_-)v_{n+2}.$$

这样，我们得出一串向量序列

$$\cdots,\ v_{j-2},\ v_j,\ v_{j+2},\ \cdots.$$

它们所生成的子空间记为$\mathscr{V}^0$. 显然有

$$\pi(W)v_n = inv_n. \tag{1}$$

现在考察$\pi(V_+)$, $\pi(V_-)$对所构造出的向量序列的作用。首先，按定义，对$n \geqslant 0$, $n \equiv j (\mathrm{mod} 2)$, 有

$$\pi(V_+)v_n = (s+1+n)v_{n+2}.$$

对于$n \leqslant -1$, $n \equiv j (\mathrm{mod} 2)$, 根据引理3.3，有

$$\pi(V_+)v_n = \frac{1}{(s+1-(n+2))}\pi(V_+)\pi(V_-)v_{n+2}$$

$$= \frac{s^2-(n+2-1)^2}{s+1-(n+2)}v_{n+2} = (s+1+n)v_{n+2}.$$

故对一切$n \equiv j (\mathrm{mod} 2)$, 有

$$\pi(V_+)v_n = (s+1+n)v_{n+2}. \tag{2}$$

同理可证，对一切$n \equiv j (\mathrm{mod} 2)$, 有

$$\pi(V_-)v_n = (s+1-n)v_{n-2}. \tag{3}$$

综合上面的讨论及引理 3.3可知，$\mathscr{V}^0$在$\pi(\mathfrak{g}_C)$及$\pi(K^0)$作用下不变。下面再考察$\pi(\varepsilon)$对它的作用。

设$j=1$。此时，因为

$$\pi(\varepsilon)\pi(V_+) = \pi(V_-)\pi(\varepsilon),$$

$$\pi(\varepsilon)\pi(V_-) = \pi(V_+)\pi(\varepsilon),$$

$$\pi(\varepsilon)\pi(W) = -\pi(W)\pi(\varepsilon),$$

我们分别讨论下面两种情况。

(a) 若$\pi(\varepsilon)v_1 \in \boldsymbol{C}\pi(V_-)v_1$, 则有

$$\pi(\varepsilon)\sum_{n\equiv 1(\mathrm{mod} 2)} \boldsymbol{C}v_n$$

$$=\pi(\varepsilon)\ (\sum_{q>0}\mathbf{C}\pi(V_+)^q v_1+\sum_{q>0}\mathbf{C}\pi(V_-)^q v_1)$$

$$=\sum_{q>0}\mathbf{C}\pi(V_-)^q\pi(\varepsilon)v_1+\sum_{q>0}\mathbf{C}\pi(V_+)^q\pi(\varepsilon)v_1$$

$$\subseteq\sum_{q>0}\mathbf{C}\pi(V_+)^q v_1+\sum_{q>0}\mathbf{C}\pi(V_-)^q v_1=\mathscr{V}^0$$

(其中用到了 $\pi(V_+)\pi(V_-)v_1=s^2v_1$ 这个结果)。故$\mathscr{V}^0$是$\mathscr{V}$的$(\mathfrak{g},K)$子模，但$\mathscr{V}$不可约，故$\mathscr{V}^0=\mathscr{V}$。

(b) 若 $\pi(\varepsilon)v_1\overline{\in}\mathbf{C}\pi(V_-)v_1$。令(注意按引理3.8，$s\neq 0$)

$$v'=v_1+\frac{1}{s}\pi(\varepsilon)\pi(V_-)v_1.$$

根据引理3.3，有 $\pi(V_+)\pi(V_-)v_1=s^2v_1$，而

$$\pi(V_-)v'=\pi(V_-)v_1+\frac{1}{s}\pi(V_-)\pi(\varepsilon)\pi(V_-)v_1$$

$$=\pi(V_-)v_1+\frac{1}{s}\pi(\varepsilon)\pi(V_+)\pi(V_-)v_1$$

$$=\pi(V_-)v_1+s\pi(\varepsilon)v_1$$

$$=\pi(\varepsilon)(sv_1+\pi(\varepsilon)\pi(V_-)v_1)=s\pi(\varepsilon)v',$$

由此即知 $\pi(\varepsilon)v'\in\mathbf{C}\pi(V_-)v'$。另一方面，

$$\pi(W)\pi(\varepsilon)\pi(V_-)v_1=-\pi(\varepsilon)\pi(W)\pi(V_-)v_1$$

$$=-\pi(\varepsilon)[\pi([W,V_-])+\pi(V_-)\pi(W)]v_1$$

$$=-\pi(\varepsilon)[-2\mathrm{i}\pi(V_-)v_1+\mathrm{i}\pi(V_-)v_1]$$

$$=\mathrm{i}\pi(\varepsilon)\pi(V_-)v_1.$$

于是

$$\pi(W)v'=\pi(W)v_1+\frac{1}{s}\pi(W)\pi(\varepsilon)\pi(V_-)v_1$$

$$=\mathrm{i}\left(v_1+\frac{1}{s}\pi(\varepsilon)\pi(V_-)v_1\right)=\mathrm{i}v'$$

$$\Rightarrow v'\in\mathscr{V}_1.$$

于是以 v' 代替 v_1，就回到情况(a)。

$j=0$ 时。现在 $\pi(\varepsilon_0)\mathscr{V}_0\subseteq\mathscr{V}_0$(见引理3.1)，因 $\mathscr{V}$ 是可容许

$(\mathfrak{g},K)$模，$\mathscr{V}_0$为有限维，可取 $0\neq v'\in\mathscr{V}^0$，使

$$\pi(\varepsilon)v'=dv',\qquad 0\neq d\in\boldsymbol{C}$$

（因 $\pi(\varepsilon)$可逆，故 $d\neq 0$）。此时将 v' 取为 v_0，显然 $\mathscr{V}^0$ 为$\mathscr{V}$的$(\mathfrak{g},K)$子模，从而同样应有 $\mathscr{V}^0=\mathscr{V}$。

综合上面的讨论，我们得知：$\mathscr{V}$内存在一组基

$$\{v_n:\ n\equiv j(\bmod 2),\ j=0\text{ 或 }1\},$$

且满足关系式(1)，(2)，(3)。此时

$$\dim\mathscr{V}_n=\begin{cases}1, & n\equiv j(\bmod 2),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

现在计算 $\pi(\varepsilon)$在这组基上作用的结果。因为

$$\pi(W)\pi(\varepsilon)v_n=-in\pi(\varepsilon)v_n,$$

即 $\pi(\varepsilon)v_n\in\mathscr{V}_{-n}$，$\dim\mathscr{V}_{-n}=1$，故$\exists\, c_n\in\boldsymbol{C}$，使

$$\pi(\varepsilon)v_n=c_nv_{-n}.$$

另一方面，我们又有

$$\begin{aligned}\pi(\varepsilon)\pi(V_+)v_n&=\pi(\varepsilon)(s+n+1)v_{n+2}\\&=(s+1+n)c_{n+2}v_{-n-2}=\pi(V_-)\pi(\varepsilon)v_n\\&=c_n\pi(V_-)v_{-n}=(s+1+n)c_nv_{-n-2}.\end{aligned}$$

根据命题3.8，$s+1+n\neq 0$，故 $c_n=c_{n+2}$。于是 c_n 与 n 无关，是一固定常数.设 $c_n=c$。因 $\pi(\varepsilon)^2=\mathrm{id}$，故 $c=\pm 1$。取 $m_1\in\{0,1\}$，使 $c=(-1)^{m_1}$，那么，我们得到

$$\pi(\varepsilon)v_n=(-1)^{m_1}v_{-n}.\tag{4}$$

现在取 $m_2\equiv m_1+j(\bmod 2)$，$m_2\in\{0,1\}$。从引理3.3知，存在 $b\in\boldsymbol{C}$，使$\forall v\in\mathscr{V}$，有

$$\pi(I)v=bv.$$

令 $s_1=\frac{1}{2}(b+s)$，　$s_2=\frac{1}{2}(b-s)$，则

$$\pi(I)v_n=(s_1+s_2)v_n.\tag{5}$$

我们前面已经导出等式

$$\pi(C)v_n=\frac{1}{2}(s^2-1)v_n.\tag{6}$$

只要取 $\mu_i(t)=|t|^{s_i}(t/|t|)^{m_i}(i=1,2)$，那么，$(\pi,\mathscr{V})$ 与 $\pi(\mu_1,\mu_2)$等价。

情况(B)。此时$\exists\, n<0$，使$\exists\, v\in\mathscr{V}_n-\{0\}$满足$\pi(V_+)v=0$。如果有正整数 q，使 $\pi(V_-)^q v=0$，设 q 是其中最小者。从引理3.5，有

$$
\begin{aligned}
0=\pi(V_-)^q\pi(V_+)v&=\pi(V_+)\pi(V_-)^q v\\
&\quad-4[n+(n-2)+\cdots+(n-2(q-1))]\pi(V_-)^{q-1}v\\
&=-4[n+(n-2)+\cdots+(n-2(q-1))]\pi(V_-)^{q-1}v.
\end{aligned}
$$

按 q 的选择，应有 $\pi(V_-)^{q-1}v\neq 0$，而 $n<0$，这是不可能的。故对一切 $q>0$，$\pi(V_-)^q v\neq 0$。令

$$\mathscr{V}'=\sum_{q>0}C\pi(V_\pm)^q v=\sum_{q=0}^{\infty}C\pi(V_-)^q v.$$

$\mathscr{V}'$显然在 $\pi(I)$, $\pi(W)$, $\pi(k_\theta)$, $\pi(V_-)$ 作用下不变。根据引理3.5，它在 $\pi(V_+)$下也不变，故$\mathscr{V}'$在 $\pi(\mathfrak{g}_C)$及 $\pi(K^0)$下不变. 利用引理3.4，我们有$(\mathfrak{g},K)$子模

$$\mathscr{V}^0=\mathscr{V}'+\pi(\varepsilon)\mathscr{V}'.$$

因为 $\pi(V_-)^q v\in\mathscr{V}_{n-2q}$，$\pi(\varepsilon)\pi(V_-)^q v\in\mathscr{V}_{-n+2q}(n<0)$，故知上面子空间的和是直和，即

$$\mathscr{V}^0=\mathscr{V}'\oplus\pi(\varepsilon)\mathscr{V}'.$$

取 $v_n=v$，$v_{-n}=\pi(\varepsilon)v$。又令 $s=-(n+1)$，取

$$v_k=\frac{1}{s+1-(k+2)}\pi(V_-)v_{k+2}\quad(\text{对 } k<n),$$

$$v_k=\frac{1}{s+1+(k-2)}\pi(V_+)v_{k-2}\quad(\text{对 } k>-n).$$

现在 v_k仅对 $|k|\geqslant n$ 和 $k\equiv n(\mathrm{mod}2)$有定义。

注意到

$$\pi(C)v=\pi\left(-\frac{1}{2}W^2-iW+\frac{1}{2}V_-V_+\right)v$$

$$= -\frac{1}{2}\pi(W)^2 v - \mathrm{i}\pi(W)v + \frac{1}{2}\pi(V_-)\pi(V_+)v$$

$$= -\frac{1}{2}(\mathrm{i}n)^2 v - \mathrm{i}(\mathrm{i}n)v = \frac{1}{2}(n^2+2n)v$$

$$= \frac{1}{2}(s^2-1)v,$$

故对一切有定义的 v_k，都有

$$\pi(C)v_k = \frac{1}{2}(s^2-1)v.$$

现在，利用引理 3.3，对 $k<n$，我们有

$$\pi(V_+)v_k = \frac{1}{s+1-(k+2)}\pi(V_+)\pi(V_-)v_{k+2}$$

$$= \frac{s^2-(k+2-1)^2}{s+1-(k+2)}v_{k+2} = (s+1+k)v_{k+2}.$$

类似地，对 $k>-n$，有

$$\pi(V_-)v_k = (s+1-k)v_{k-2}.$$

总之，对一切有定义的 v_k，都有

$$\pi(V_+)v_k = (s+1+k)v_{k+2},$$

$$\pi(V_-)v_k = (s+1-k)v_{k-2}.$$

按定义，有 $\pi(\varepsilon)v_n = v_{-n}$。对 $k<n$ 作数学归纳法，有

$$\pi(\varepsilon)v_k = \pi(\varepsilon)\left[\frac{1}{s+1-(k+2)}\pi(V_-)v_{k+2}\right]$$

$$= \frac{1}{s+1-(k+2)}\pi(V_+)\pi(\varepsilon)v_{k+2}$$

$$= \frac{1}{s+1+(-k-2)}\pi(V_+)v_{-k-2} = v_{-k}.$$

又因为 $\pi(\varepsilon)^2=1$，故对一切 $|k|\geqslant n$，$k\equiv n(\mathrm{mod}2)$，有

$$\pi(\varepsilon)v_k = v_{-k} = (-1)^{m}\iota v_{-k}.$$

这里我们取 $m_1=0$。又令 $m_2\in\{0,1\}, m_2\equiv n(\bmod 2)$。因为 $\pi(I)v=c'v$，从方程 $s=s_1-s_2$ 和 $c'=s_1+s_2$ 求出 s_1,s_2，令

$$\mu_i(t)=|t|^{s_i}(t/|t|)^{m_i},\quad i=1,2。$$

显然，此时$(\pi,\mathscr{V}^0)$与$\sigma(\mu_1,\mu_2)$等价。但$\mathscr{V}$不可约，故$\mathscr{V}=\mathscr{V}^0$。

情况(C)。设$\exists n\geqslant 0$ 使$\exists v_n\in\mathscr{V}_n-\{0\}$，满足 $\pi(V_+)v_n=0$。在引理 3.5 中取 $q=n+1$，我们有

$$0=\pi(V_-)^{n+1}\pi(V_+)v_n=\pi(V_+)\pi(V_-)^{n+1}v_n。$$

此时，或者

(a) $\pi(V_-)^{n+1}v_n\neq 0$，

或者

(b) $\pi(V_-)^{n+1}v_n=0$。

对于情况(a)，$v=\pi(V_-)^{n+1}v_n\in\mathscr{V}_{-n-2}(n\geqslant 0$，故 $-n-2<0)$，而 $\pi(V_+)v=0$。这归结为上述的情况(B)。

对于情况(b)，我们令

$$\mathscr{V}'=\sum_{q>0}C\pi(V_\pm)^q v_n=\sum_{q=0}^{n}C\pi(V_-)^q v_n。$$

$\mathscr{V}'$在 $\mathfrak{g}_C$与K^0下不变，利用与情况(A)相似的办法可证明 $\pi(\varepsilon)\mathscr{V}'\subseteq\mathscr{V}'$，故$\mathscr{V}'$是$(\mathfrak{g},K)$子模，但$\mathscr{V}$不可约，故$\mathscr{V}'=\mathscr{V}$。

取 $s=n+1$，对 $k=0,\cdots,n-1$，定义

$$v_{n-2(k+1)}=\frac{1}{s+1-(n-2k)}\pi(V_-)v_{n-2k}。$$

注意到

$$\pi(C)v_n=\left[-\frac{1}{2}\pi(W)^2-\mathrm{i}\pi(W)+\frac{1}{2}\pi(V_-)\pi(V_+)\right]v_n$$

$$=\frac{1}{2}(n^2+2n)v_n=\frac{1}{2}(s^2-1)v_n,$$

故对一切有定义的 v_k，

$$\pi(C)v_k=\frac{1}{2}(s^2-1)v_k。$$

按v_k的定义，我们自然有

$$\pi(V_-)v_k=(s+1-k)v_{k-2}。$$

利用引理3.3，有

$$\begin{aligned}\pi(V_+)v_{n-2(k+1)}&=\frac{1}{s+1-(n-2k)}\pi(V_+)\pi(V_-)v_{n-2k}\\&=\frac{s^2-(n-2k-1)^2}{s-(n-2k-1)}v_{n-2k}\\&=[s+1+(n-2(k+1))]v_{n-2k}。\end{aligned}$$

和情况(A)中的讨论相似，我们知道可选取$m_1\in\{0,1\}$，使

$$\pi(\varepsilon)v_k=(-1)^{m_1}v_{-k}。$$

再取$m_2\in\{0,1\}$，使$m_2\equiv n+m_1(\text{mod}2)$。设$\pi(I)v_n=c'v_n$，选取$s_1,s_2$，使$s=s_1-s_2$，$c'=s_1+s_2$，令

$$\mu_i(t)=|t|^{s_i}(t/|t|)^{m_i},\quad i=1,2。$$

那么，$(\pi,\mathscr{V})$与$\pi(\mu_1,\mu_2)$等价。

情况(D)。$\exists n>0$，使$\exists v\in\mathscr{V}_n-\{0\}$，满足$\pi(V_-)v=0$。因为$\pi(\varepsilon)^2=\text{id}$，故$0\neq\pi(\varepsilon)v\in\mathscr{V}_{-n}$，而

$$\pi(V_+)\pi(\varepsilon)v=\pi(\varepsilon)\pi(V_-)v=0。$$

这样，$\pi(\varepsilon)v$满足情况(B)中的条件，于是此时问题可归结为情况(B)。

情况(E)。和情况(D)类似，此时问题可归结为情况(C)而得到解答。

定理3.6到此证明完毕。▍

§4 GL(2,C)的可容许表示

在§2，§3中对GL(2,**R**)引进的许多概念和推导出来的一些结果，只要作一些简单的修改之后，就可以用到群GL(2,**C**)上来。在这一节里，我们概略地介绍GL(2,**C**)的可容许的不可约表示的分类问题的主要结果，略去了这些结果的详细推导。

GL(2,$\boldsymbol{C}$)的极大紧子群$U(2,\boldsymbol{C})$（二阶酉矩阵所组成的子群）在这里起着上两节中群$K=O(2,\boldsymbol{R})$所起的作用。把GL(2,$\boldsymbol{C}$)看作为实李群，其李代数为$\mathfrak{g}$，令$\mathfrak{g}_C=\mathfrak{g}\otimes_R\boldsymbol{C}$，$\mathfrak{U}$为$\mathfrak{g}_C$的通用包络代数。$\mathfrak{U}$的一个表示称为可容许的，如果它限制在$U(2,\boldsymbol{C})$的李代数上能分解为有限维不可约表示的直和，而且每个不可约表示出现的重数是有限的（这与§2中可容许性的概念等价）。

对于群$\boldsymbol{C}^\times$的两个特征标μ_1,μ_2，我们同样定义无限维函数空间$\mathscr{F}(\mu_1,\mu_2)$以及$\mathfrak{U}$的表示$(\rho(\mu_1,\mu_2),\mathscr{F}(\mu_1,\mu_2))$。

设

$$\mu_i(z)=(z\bar{z})^{s_i-\frac{1}{2}(a_i+b_i)}z^{a_i}\bar{z}^{b_i}$$

$$(i=1,2;\ z\in\boldsymbol{C}^\times),$$

$$\mu_1\mu_2^{-1}(z)=\mu(z)=(z\bar{z})^{s-\frac{1}{2}(a+b)}z^a\bar{z}^b,$$

这里a_i,b_i,a,b是非负整数，且$a_ib_i=ab=0$。

那么，我们关于GL(2,$\boldsymbol{C}$)的可容许不可约表示的主要结果可综述如下：

定理 4.1 （1）以ρ_n表示SU(2,$\boldsymbol{C}$)（行列式为1的二阶酉矩阵所组成的群）的唯一的$n+1$维不可约表示。$\rho(\mu_1,\mu_2)$是可容许的并包含ρ_n的充分必要条件是：$n\geqslant a+b$，$n\equiv a+b\pmod 2$。此时它仅包含ρ_n一次。

（2）令$\mathscr{F}(\mu_1,\mu_2,\rho_n)$表示$\mathscr{F}(\mu_1,\mu_2)$内$\rho_n$的作用空间，那么：

(a) 如果$\mu(z)$不是$z^p\bar{z}^q$或$z^{-p}\bar{z}^{-q}$的形式，其中$p\geqslant1$，$q\geqslant1$，那么$(\rho(\mu_1,\mu_2),\mathscr{F}(\mu_1,\mu_2))$是不可约的。与$\rho(\mu_1,\mu_2)$等价的表示记作$\pi(\mu_1,\mu_2)$。

(b) 如果$\mu(z)=z^p\bar{z}^q$，其中$p\geqslant1$，$q>1$。那么

$$\mathscr{F}_\sigma(\mu_1,\mu_2)=\sum_{\substack{n>p+q\\ n\equiv p+q\,(\mathrm{mod}\,2)}}\mathscr{F}(\mu_1,\mu_2,\rho_n)$$

是$\mathscr{F}(\mu_1,\mu_2)$的唯一真不变子空间。以$\sigma(\mu_1,\mu_2)$记与$\mathscr{F}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$等价的任意表示。而以$\pi(\mu_1,\mu_2)$记与商空间

$$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)/\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$$

上的表示等价的任意一个表示。

(c) 如果 $\mu(z)=z^{-p}\bar{z}^{-q}$，这里 $p\geqslant1$，$q\geqslant1$。那么

$$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\sum_{\substack{|p-q|\leqslant n<p+q\\ n\equiv p+q\,(\mathrm{mod}\,2)}}\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2,\rho_n)$$

是$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$的唯一真不变子空间。以$\pi(\mu_1,\mu_2)$记与$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)$等价的任意一个表示，又以$\sigma(\mu_1,\mu_2)$记与商空间

$$\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)/\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)$$

上的表示等价的任意一个表示。

定理4.2 符号如上。

(1) $\pi(\mu_1,\mu_2)$与$\pi(\mu'_1,\mu'_2)$等价的充分必要条件是

$$(\mu_1,\mu_2)=(\mu'_1,\mu'_2)或(\mu'_2,\mu'_1)。$$

(2) $\sigma(\mu_1,\mu_2)$与$\sigma(\mu'_1,\mu'_2)$(如果它们都有定义)等价的充分必要条件是

$$(\mu_1,\mu_2)=(\mu'_1,\mu'_2)\ 或\ (\mu'_2,\mu'_1)。$$

(3) 如果 $\mu(z)=z^p\bar{z}^q$，其中 $p\geqslant1,q\geqslant1$，那么存在一对特征ν_1,ν_2，使 $\mu_1\mu_2=\nu_1\nu_2$，而且 $\nu_1\nu_2^{-1}=z^p\bar{z}^{-q}$，此时 $\sigma(\mu_1,\mu_2)$等价于$\pi(\nu_1,\nu_2)$。

定理4.3 GL$(2,\boldsymbol{C})$ 的每个可容许的不可约表示都与某一个$\pi(\mu_1,\mu_2)$等价。

从上面的定理可以看出，GL$(2,\boldsymbol{C})$的可容许不可约表示不存在离散序列。这是它与GL$(2,\boldsymbol{R})$的一个不同点。

习 题 一

1. 分别以 G,K,A,N 记 SL$(2,\boldsymbol{R})$，SO$(2,\boldsymbol{R})$，$\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}:a\in\boldsymbol{R}^\times\right\}$，$\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}:x\in\boldsymbol{R}\right\}$。$G$ 作用在上半复平面

$$\mathfrak{h}=\{z\in\boldsymbol{C}:\mathrm{Im}z>0\},$$

其法则如下：$z\in\mathfrak{h}$，$g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G$，

$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d}.$$

则

$$\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}(\mathrm{i})=x+\mathrm{i}y,\ y=a^2,\ \mathrm{i}=\sqrt{-1}.$$

(1) 证明$NA\to\mathfrak{h}$：$g\mapsto g(\mathrm{i})$是双射。以d^+a记$\boldsymbol{R}$的Haar测度，则$\boldsymbol{R}^\times$的Haar测度为

$$\mathrm{d}^\times a=\frac{\mathrm{d}^+a}{a}.$$

设$\alpha(a)=a^2$。

(2) 证明$\mathfrak{h}$的G不变测度$\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2y^2}$在$NA$上是$\alpha(a)^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}^\times a$。注意，我们有

$$\{g\in G:g(\mathrm{i})=\mathrm{i}\}=K.$$

(3) 证明$G/K\to\mathfrak{h}$：$gK\mapsto g(\mathrm{i})$是双射。对$f\in C_c(G)$，设

$$f^K(g)=\int_K f(gk)\mathrm{d}k.$$

则G的Haar测度$\mathrm{d}g$唯一决定G/K的G不变测度$\mathrm{d}\dot{g}$，使得

$$\int_{G/K}f^K\mathrm{d}\dot{g}=\int_G f\mathrm{d}g.$$

(4) 证明$G=NAK$和

$$\int_G f(g)\mathrm{d}g=\int_N\int_A\int_K f(nak)\alpha(a)^{-1}\mathrm{d}n\mathrm{d}a\mathrm{d}k.$$

2. 继续用上题的符号。如果$g\in G=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$可以写为

$$g=h_a\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}r_\theta,$$

其中

$$h_a=\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix},\quad r_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

则取 $a(g)=a^2$。

（1）证明
$$a(r_\theta h_a)=(a^2\sin^2\theta+a^{-2}\cos^2\theta)^{-1}.$$

对 $s\in\boldsymbol{C},a\in\boldsymbol{R}^\times$，设
$$\phi_s(a)=\int_K a(kh_a)^{\frac{s+1}{2}}\mathrm{d}k.$$

取 $v=a^2\tan\theta$。则
$$\phi_{2s-1}(a)=\frac{a^{2(s-1)}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+v^2/a^4)^{s-1}}{(1+v^2)^s}\mathrm{d}v.$$

（2）用控制收敛定理证明以下渐近展开式
$$\phi_s(a)\sim\frac{a^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((s+1)/2)},\quad a\to\infty.$$

3．对 $\theta,t,x\in\boldsymbol{R}$，取
$$r_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad a_t=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix},\quad n_x=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

设
$$H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

（1）证明：$r_\theta=\exp\theta(X-Y),a_t=\exp tH,n_x=\exp xX$。

设 $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G=\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$。

（2）证明：
$$g=r_\theta a_t n_x,$$

其中$\theta=\tan^{-1}(-c/a)$，$t=\dfrac{1}{2}\log(a^2+c^2),x=\dfrac{ab+cd}{a^2+c^2}$；以及
$$g^{-1}r_\theta=r_{\psi(g;\theta)}a_{\tau(g;\theta)}n_{x(g;\theta)},$$

其中
$$\tau(g;\theta)=\frac{1}{2}\log[(d\cos\theta+b\sin\theta)^2+(c\cos\theta+a\sin\theta)^2],$$
$$\psi(g;\theta)=\tan^{-1}\left[\frac{c\cos\theta+a\sin\theta}{d\cos\theta+b\sin\theta}\right].$$

设$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2(\boldsymbol{R})$是$G$的李代数，$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{g}$的通用包络代数，对$X_1,\cdots,X_r\in\mathfrak{g}$, $a=X_1X_2\cdots X_r\in\mathfrak{A}$定义微分算子如下：$f\in C^\infty(G)$, $g\in G$,

$$f(g;a)=\frac{\partial^r}{\partial t_1\cdots\partial t_r}f(g\exp t_1X_1\cdots\exp t_rX_r)\Big|_{t_1=\cdots=t_r=0},$$

$$f(a;g)=\frac{\partial^r}{\partial t_1\cdots\partial t_r}f(\exp t_1X_1\cdots\exp t_rX_rg)\Big|_{t_1=\cdots=t_r=0}.$$

设$Z=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}\in\mathfrak{g}$.

(3) 令

$\tau(1;Z:\theta)=[\cos\theta(-\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)+\sin\theta(\gamma\cos\theta+\alpha\sin\theta)]$,

$\psi(1;Z:\theta)=[\cos\theta(\gamma\cos\theta+\alpha\sin\theta)-\sin\theta(-\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)]$.

如果(π,V)是G的表示，$v\in V$，使得

$$G\to V:g\mapsto\pi(g)v$$

是光滑函数，对$a\in\mathfrak{A}$，则设$\pi(a)v=\pi(1;a:v)$。设

$$M=\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

以“+”记恒等于1的表示，以“−”记表示

$$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mapsto\pm1.$$

则$\hat{M}=\{+,-\}$。设$\mathscr{H}=L^2(K)$, $K=\{r_\theta:\theta\in\boldsymbol{R}\}$。以$\mathscr{H}_+$记所有的$f\in\mathscr{H}$使得

$$f(km)=(+(m))^{-1}f(k),\quad m\in M$$

对差不多所有的$k\in K$成立。同样定义$\mathscr{H}_-$。对$m\in\boldsymbol{Z}$取

$$\phi_m(\theta)=e^{-im\theta}.$$

(4) 证明：$\mathscr{H}_+$由$\phi_{2n}(n\in\boldsymbol{Z})$生成，$\mathscr{H}_-$由$\phi_{2n+1}(n\in\boldsymbol{Z})$生成，$\mathscr{H}=\mathscr{H}_+\oplus\mathscr{H}_-$。把$g\in G$对$G=KMAN(A=\{a_t:t\in\boldsymbol{R}\}, N=\{n_x:x\in\boldsymbol{R}\})$分解成

$$g=\mathbf{k}(g)m(g)e^{H(g)}n(g).$$

对 $\lambda\in\boldsymbol{C}$，定义 G 的表示 $(\pi_{\pm,\lambda},\mathscr{H}_{\pm})$ 如下(将 $f(r_\theta)$ 简写为 $f(\theta)$)：

$$(\pi_{\pm,\lambda}(g)f)(\theta)=e^{-(\lambda+1)\tau(g;\theta)}f(\psi(g;\theta)).$$

(5) 证明以下公式

$$\pi_{\pm,\lambda}(Z)f(\theta)=-(\lambda+1)\tau(1;Z:\theta)f(\theta)$$

$$+\psi(1;Z:\theta)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}(\theta);$$

$$\pi_{\pm,\lambda}(H)\phi_m=\frac{1}{2}(\lambda+1+m)\phi_{m+2}+\frac{1}{2}(\lambda+1-m)\phi_{m-2};$$

$$\pi_{\pm,\lambda}(X)\phi_m=\frac{1}{4\mathrm{i}}(\lambda+1+m)\phi_{m+2}+\frac{\mathrm{i}m}{2}\phi_m$$

$$-\frac{1}{4\mathrm{i}}(\lambda+1-m)\phi_{m-2};$$

$$\pi_{\pm,\lambda}(Y)\phi_m=\frac{1}{4\mathrm{i}}(\lambda+1+m)\phi_{m+2}-\frac{\mathrm{i}m}{2}\phi_m$$

$$-\frac{1}{4\mathrm{i}}(\lambda+1-m)\phi_{m-2};$$

$$\pi_{\pm,\lambda}(H'):\phi_m\mapsto m\phi_m,\ H'=-\mathrm{i}(X-Y);$$

$$\pi_{\pm,\lambda}(X'):\phi_m\mapsto(\lambda+1+m)\phi_{m+2},\quad X'=H+\mathrm{i}(X+Y);$$

$$\pi_{\pm,\lambda}(Y'):\phi_m\mapsto(\lambda+1-m)\phi_{m-2},\quad Y'=H-\mathrm{i}(X+Y).$$

(6) 证明：如果 $\lambda\notin\boldsymbol{Z}$，则 $\pi_{+,\lambda}$ 和 $\pi_{-,\lambda}$ 都是不可约的。如果 λ 是偶整数，则 $\pi_{+,\lambda}$ 是不可约的，$\pi_{-,\lambda}$ 是可约的。如果 λ 是奇整数，则 $\pi_{-,\lambda}$ 是不可约的，$\pi_{+,\lambda}$ 是可约的。

4. 李代数 $\mathfrak{g}=\mathrm{sl}(2,\boldsymbol{R})$ 以

$$H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

为基。以 ad 记伴随表示。对变元 t，考虑行列式

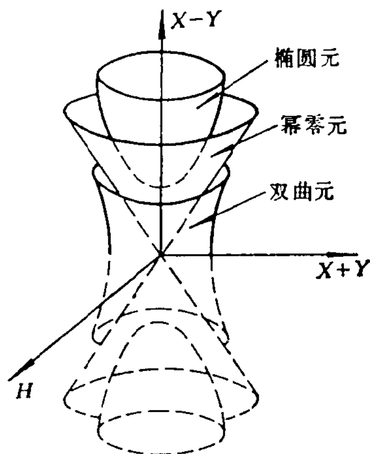
$$\det=(t\cdot 1-\mathrm{ad}X)=q_3(X)t^3-q_2(X)t^2+q_1(X)t,$$

其中 q_i 是 $\mathfrak{g}_C$ 上的多项式。

(1) 证明：如果 $\mathfrak{h}_C$ 是 $\mathfrak{g}_C$ 的 Cartan 子代数，α 是 $(\mathfrak{g}_C, \mathfrak{h}_C)$ 的正根，$H \in \mathfrak{h}_C$，则 $q_3(H) = \alpha(H)$。称 $X \in \mathfrak{g}_C$ 为正则元，如果 $q_3(X) \neq 0$。如果 $\mathrm{ad}X$ 为幂零变换，则称 X 为幂零元。在 $\mathfrak{g}_C$ 上取多项式 ω：

$$\omega(xH + y(X+Y) + z(X-Y)) = x^2 + y^2 - z^2.$$

(2) 证明：如果 $\omega(Z) \neq 0$，则 Z 为 $\mathfrak{g}_C$ 的正则元；如果 $\omega(Z) = 0$，则 Z 为幂零元。称 $Z \in \mathfrak{g}_C$ 为双曲元，如果 $\omega(Z) > 0$；为椭圆元，如果 $\omega(Z) < 0$（见附图）。



附 图

(3) 证明：在 $G = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{R})$ 的作用下，$\mathfrak{g}$ 分解为以下轨道：

$$\mathfrak{g}_h = \{Z : Z \in \mathfrak{g}, \omega(Z) > 0\};$$

$$\mathfrak{g}_e^+ = \{Z = xH + y(X+Y) + z(X-Y) : x^2 + y^2 - z^2 < 0, z > 0\};$$

$$\mathfrak{g}_e^- = \{Z = xH + y(X+Y) + z(X-Y) : x^2 + y^2 - z^2 < 0, z < 0\};$$

$$\mathfrak{g}_n^+ = \{Z = xH + y(X+Y) + z(X-Y) : x^2 + y^2 - z^2 = 0, \ z > 0\};$$

$$\mathfrak{g}_n^- = \{Z = xH + y(X+Y) + z(X-Y):$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \ z<0\}$$

和$\{0\}$。

5．设(π, V)是$SL(2,\boldsymbol{R})$的表示。以$SL^{\pm}(2,\boldsymbol{R})$记行列式为$\pm 1$的实$2\times 2$矩阵。作诱导表示(从$SL(2,\boldsymbol{R})$至$SL^{\pm}(2,\boldsymbol{R})$)：$\pi' = \mathrm{Ind}_{SL(2,\boldsymbol{R})}^{SL^{\pm}(2,\boldsymbol{R})}\pi$。把$GL(2,\boldsymbol{R})$的元写成

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |ad-bc|^{1/2} & 0 \\ 0 & |ad-bc|^{1/2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{a}{|ad-bc|^{1/2}} & \dfrac{b}{|ad-bc|^{1/2}} \\ \dfrac{c}{|ad-bc|^{1/2}} & \dfrac{d}{|ad-bc|^{1/2}} \end{pmatrix},$$

取$\boldsymbol{R}_+^\times$的特征标χ作$GL(2,\boldsymbol{R})$的表示：

$$\tilde{\pi}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \chi(|ad-bc|^{1/2}) \times \pi'\begin{pmatrix} \dfrac{a}{|ad-bc|^{1/2}} & \dfrac{b}{|ad-bc|^{1/2}} \\ \dfrac{c}{|ad-bc|^{1/2}} & \dfrac{d}{|ad-bc|^{1/2}} \end{pmatrix}.$$

现取π为习题3中的$\pi_{\pm,\lambda}$。试比较$\tilde{\pi}_{\pm,\lambda}$及§2的$(\mathfrak{g}, K)$模。

6．设$\{\phi_n\}$，$\{\phi'_n\}$分别是$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，$\mathscr{I}(\mu_2,\mu_1)$的基。定义映射$T: \mathscr{I}(\mu_1,\mu_2) \to \mathscr{I}(\mu_2,\mu_1)$使得$T\phi_n = a_n\phi'_n$。

(1) 若$s-m$不是奇数，则设

$$a_n = \Gamma((-s+1+n)/2)/\Gamma((s+1+n)/2);$$

(2) 若$s-m$是奇数，$s\leqslant 0$，则设

$$a_n = \lim_{z\to s} \Gamma((-z+1+n)/2)/\Gamma((z+1+n)/2);$$

(3) 若$s-m$是奇数，$s>0$，则设

$$a_n = \lim_{z \to s}(z - s)\Gamma((-z+1+n)/2)/\Gamma((z+1+n)/2).$$

证明：T是$(\mathfrak{g}_C, K)$模同态，而且(a) 如果$s-m$不是奇数，则T是同构；(b) 如果$s \leqslant 0$和$s-m$是奇数，则$\mathrm{Ker}T = \mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)$和$T$在$\mathscr{I}_\sigma(\mu_1, \mu_2)$上可逆；(c) 如果$s>0$和$s-m$是奇数，则$\mathrm{Ker}T = \mathscr{I}_\sigma(\mu_1, \mu_2)$及$T$在$\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)$上可逆。

7. 设$\Gamma = \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{Z})$, $G = \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})$, $N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \boldsymbol{R}\right\}$,

$A = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} : a_i > 0\right\}$, $K = O(2, \boldsymbol{R}), N_u = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : |x| \leqslant u\right\}$,

$A_t = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in A : a_1 a_2^{-1} \geqslant t\right\}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{u,t} = N_u A_t K$, $e_1 = (1, 0)$,

$e_2 = (0, 1), x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in \boldsymbol{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$，定义函数$\Phi: G \to \boldsymbol{R}_+ : g \mapsto \|e_2 \cdot g\|$。证明

(1) $N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \boldsymbol{Z}\right\} \cdot N_{1/2}$;

(2) 如果ω是N的紧子集，则$\bigcup\limits_{a \in A_t} a^{-1} \omega a$亦是$N$的紧子集；

(3) $e_2 \cdot \Gamma \cdot g \subseteq (\boldsymbol{Z}^2 - \{0\}) \cdot g$;

(4) $\Phi\left(n\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}k\right) = a_2$;

(5) $\Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}k\right) = a_1^2 + a_2^2 x^2$;

(6) 如果对所有的$\gamma \in \Gamma, \Phi(g) \leqslant \Phi(\gamma_g), g = n\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}k$,

则$a_1 a_2^{-1} \geqslant \sqrt{3}/2$;

(7) $\min\limits_{\Gamma g} \Phi(x) = \min\limits_{\Gamma g \cap \mathfrak{S}_{1/2, \sqrt{3}/2}} \Phi(x)$;

(8) $G = \Gamma \mathfrak{S}_{u,t}$，如果$u \geqslant 1/2, t \leqslant \sqrt{3}/2$。

非退化正定对称实 2×2 矩阵组成集H。集H的元可看作非退化正定二元二次型。G 在H上作用如下：$g\in G$，$A\in H$，$A\mapsto {}^t gAg=[g]A$。证明

(9) $H=G/K$。

设 $\mathfrak{S}'_{t,u}=\{{}^t nan: a\in A_t, n\in N_u\}$。证明

(10) $H=[\Gamma]\mathfrak{S}'_{t,u}$。

(以上是二元二次型的约化理论。)

第二章　p 进域上GL(2)的无限维表示

本章讨论局部域上二阶全矩阵群 GL(2)的无限维表示理论，给出可容许的不可约表示的分类。这些结果在自守形式的理论中将起重要的作用。

§1　完全不连通群的表示

设X是一个拓扑空间，M是X的一个非空子集，如果M不能表成它的两个非空、互不相交的开子集(关于M的诱导拓扑)的并，则称M是一个连通子集。X的一族连通子集，如果其中任意两个子集都有公共点，则它们的并集也是连通的。因此，对X的每一个点x，存在着唯一的一个包含x的最大连通子集，称为X的连通区。如果X的所有连通区都由一个点组成，则X称为完全不连通拓扑空间。

一个拓扑群的底空间如果是完全不连通的，则称为完全不连通群。本节讨论局部紧完全不连通群的无限维表示理论的一些基本概念。下面以G记局部紧完全不连通群。容易证明(请参看拓扑群的有关书籍)，群G的单位元素的每一个邻域都包含有一个紧开子群。

设V是复数域$\mathbf{C}$上的向量空间，GL(V)为V上可逆线性变换所组成的群，G到GL(V)的一个同态映射π称为G的一个**表示**，记作(π, V)。对G的任意子群H，令

$$V^H=\{v\in V:\pi(h)v=v,\ \ \forall h\in H\}.$$

定义1.1　给定群G的一个表示(π, V)，如果对任意$v\in V$，集合

$$G_v = \{g \in G : \pi(g)v = v\}$$

都是G的开子群，则称表示(π, V)是光滑的。

如果(π, V)是光滑表示，任取$v \in V$，G_v是G的开子群，因而是G的单位元素e的开邻域，从而其中应包含G的一个紧开子群K，此时因$K \subseteq G_v$，故$v \in V^K$。于是

$$V = \bigcup_K V^K \text{（其中}K\text{取}G\text{的所有紧开子群）.} \qquad (1)$$

反之，如果上式成立，任取$v \in V$，则存在G的紧开子群K，使$v \in V^K$，此时$K \subseteq G_v$。于是K是G_v的开子群，我们有左陪集分解：$G_v = \bigcup gK$，gK都是开集，故G_v是一个开子群，这表明(π, V)是光滑表示。所以定义1.1等价于空间分解式(1)。

定义1.2 群G的表示(π, V)如果满足如下两个条件：

(1) (π, V)是光滑表示；

(2) 对G的任意紧开子群K，有

$$\dim_{\mathbb{C}} V^K < \infty,$$

则称(π, V)是**可容许表示**。

取定G的一个极大紧开子群K。设(τ, W)是K的一个连续不可约表示，我们令

$$V_\tau = \{v \in V:\ \exists \text{线性单射}\ T: W \to V,\ \text{使}\ v \in T(W)\ \text{且}$$
$$\forall \mathbf{k} \in K,\ w \in W,\ \text{有}\ T\tau(\mathbf{k})w = \pi(\mathbf{k})Tw\}.$$

引理1.1 (π, V)是G的可容许表示的充分必要条件是：

(1) $V = \sum_\tau V_\tau$（对K的所有连续不可约表示τ求和）；

(2) $\dim V_\tau < \infty$。

证 $\Longrightarrow$。对任意$v \in V$，考虑它的固定子群G_v，这是G的开子群，令$U = G_v \cap K$，U是K的开子群，K是紧的，故$K = \bigcup_{i=1}^N \mathbf{k}_i U$。于是用$K$的元素作用在$v$上生成的子空间是有限维的，它是$K$的一个不可约连续表示，应包含在某个$V_\tau$之中，故有

$$V=\sum_{\tau}V_{\tau}.$$

现设K的不可约连续表示τ在V内的作用空间(注意K的不可约连续表示都是有限维的)内的一组基为$\{v_1,\cdots,v_d\}$，取所有v_i在K内的稳定子群(为K的d个开子群)的交K^*．K^*为K的紧开子群，而$V_{\tau}\subseteq V^{K^*}$．$V^{K^*}$是有限维的，所以$V_{\tau}$也是有限维的。

$\Leftarrow$．取定$v\in V$。按引理的条件，不失一般性，我们可以假设v属于某个V_{τ}的某个不可约子空间，由于τ是连续表示，所以v的稳定子群应当包含K的某个开子群，根据我们对定义1.1所作的讨论可知表示(π,V)是光滑的。

现设U是K的任意紧开子群，不失一般性，可设U是K的正规子群。现在只要证明V^U包含在有限多个V_{τ}之中就可以了(因为每个V_{τ}是有限维的)。假设τ是K的一个不可约连续表示，它限制在U上是恒等表示，而w是τ的作用空间中一个在$\tau(U)$下不动的向量，那么$\pi(K)w$也在$\tau(U)$下不动(因为U是K的正规子群，故$\pi(k^{-1})\pi(u)\pi(K)w=\pi(u')w=w$，$\forall k\in K$，$u\in U$)。这样，$K$的在$U$上为恒等表示的连续不可约表示和有限群$K/U$的不可约表示的等价类之间存在一一对应，因而只有有限多个。在这些表示作用下不动的子空间的直和包含V^U，故$\dim V^U<\infty$. ▎

引理1.2(Schur)　设(π,V)是G的可容许不可约表示，则

$$\mathrm{Hom}_G(V,V)=\mathbf{C}.$$

证　已知

$$V=\bigcup_{K}V^K\ (\text{对}G\text{的所有紧开子群求并}).$$

取$0\neq A\in\mathrm{Hom}_G(V,V)$，则$\forall g\in G$，有$A\pi(g)=\pi(g)A$。由此即知$AV^K\subseteq V^K$。而$\dim V^K<\infty$。故$A$在$V^K$内有特征值$a_0\in\mathbf{C}$。令

$$V_0=\{v\in V:Av=a_0v\}\neq\{0\}.$$

此时对 $\forall g\in G$，有

$$A\pi(g)v=\pi(g)Av=a_0\pi(g)v \quad (\forall v\in V_0).$$

故 $\pi(g)V_0\subseteq V_0$。但 V 不可约，故 $V_0=V$。于是 $A=a_0\mathrm{id}$，即 $\mathrm{Hom}_G(V,V)$ 内一切元素都是乘纯量的线性变换。|

现在考察 G 的可容许表示 (π,V)。设 K 是 G 的一个紧开子群，而 V^* 是 V 的对偶空间。定义

$$V^*(K)=\{v^*\in V^*:\forall k\in K,\ \langle v^*,\pi(k)v\rangle=\langle v^*,v\rangle,\ \forall v\in V\},$$

我们称 $\tilde{V}=\bigcup_K V^*(K)$ 是 V 的光滑对偶空间。所以 $\tilde{V}$ 的元是在 G 的某一个紧开子群作用下不变的线性泛函。

定义1.3 在 $\tilde{V}$ 上定义 G 的表示 $\tilde{\pi}$ 如下：

$$\langle\tilde{\pi}(g)v^*,v\rangle=\langle v^*,\pi(g^{-1})v\rangle,\qquad \forall v^*\in\tilde{V},v\in V,$$

称 $(\tilde{\pi},\tilde{V})$ 为 (π,V) 的**逆步表示**。

$\tilde{\pi}$ 之所以是 G 的一个表示，是因为

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\pi}(g_1g_2)v^*,v\rangle&=\langle v^*,\pi((g_1g_2)^{-1})v\rangle\\&=\langle v^*,\pi(g_2^{-1})\pi(g_1^{-1})v\rangle\\&=\langle\tilde{\pi}(g_2)v^*,\pi(g_1^{-1})v\rangle\\&=\langle\tilde{\pi}(g_1)\tilde{\pi}(g_2)v^*,v\rangle,\end{aligned}$$

即 $\tilde{\pi}(g_1g_2)=\tilde{\pi}(g_1)\tilde{\pi}(g_2)$。另一方面，对 $v^*\in V^*(g^{-1}Kg)\subseteq\tilde{V}$，有

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\pi}(g)v^*,\pi(k)v\rangle&=\langle v^*,\pi(g^{-1})\pi(k)v\rangle\\&=\langle v^*,\pi(g^{-1}kg)\pi(g^{-1})v\rangle\\&=\langle v^*,\pi(g^{-1})v\rangle\\&=\langle\tilde{\pi}(g)v^*,v\rangle,\qquad\forall v\in V.\end{aligned}$$

由此知 $\tilde{\pi}(g)v^*\in V^*(K)\subseteq\tilde{V}$，于是 $(\tilde{\pi},\tilde{V})$ 是 G 的一个表示。

§2 诱导表示的结构

在本节中，F 表示 p 进数域 $\mathbf{Q}_p$ 的有限次扩域，而 $|\cdot|=$

$|\cdot|_F = \alpha_F(\cdot)$表示$F$内的赋值。又令

$$\mathcal{O}_F = \{x \in F : |x| \leqslant 1\},$$
$$\mathcal{P}_F = \{x \in F : |x| < 1\}.$$

令$G = \mathrm{GL}(2,F)$，$K = \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_F)$是$G$的一个极大紧开子群。取$G$的两个子群$N$，$A$如下：

$$N = \left\{ n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in F \right\},$$

$$A = \left\{ a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} : a_1, a_2 \in F^\times \right\},$$

令$B = NA$。本节的目的，与第一章类似，从$F^\times$的特征标构造出B的表示，从而得到群G的诱导表示$(\rho(\mu_1,\mu_2), \mathcal{J}(\mu_1,\mu_2))$，并进而讨论这样的诱导表示的结构(参看下面的定理2.10)。

定义2.1 设μ_1, μ_2为$F^\times$的特征标(quasi-character，即不一定是酉特征标)。以$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mu_1, \mu_2)$记满足以下条件的$G$上函数$\phi$所组成的复向量空间：

(1) $\phi: G \longrightarrow \boldsymbol{C}$是局部常值函数(即在$G$上每一点都存在一个邻域，使$\phi$限制在该邻域内是一个常数)；

(2) 对任意$g \in G$，$a_1, a_2 \in F^\times$，$x \in F$，有

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{1/2}\phi(g).$$

以$\rho = \rho(\mu_1, \mu_2)$记$G$在$\mathcal{J}$上的右正则表示，即$\forall g \in G$，及$\phi \in \mathcal{J}$，定义

$$\rho(g)\phi(h) = \phi(hg), \quad \forall h \in G.$$

根据Iwasawa分解式：$G = B\mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_F)$，$\mathcal{J}(\mu_1, \mu_2)$内的函数由它在$\mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_F)$上的限制所唯一决定，这个限制函数可以是$\mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_F)$上满足下列条件

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\phi(g)$$

$(\forall g\in K,\ a_1,a_2\in \mathscr{O}_F\backslash\mathscr{P}_F,\ x\in \mathscr{O}_F)$的任何局部常值函数。如果$U$是$K$的一个开子群，限制在$K$上而在$\rho(U)$作用下不变的函数，即满足如下条件

$$\rho(u)\phi(k)=\phi(ku)=\phi(k)\quad(\forall k\in K,u\in U)$$

的函数可以看作定义在陪集空间K/U上的函数，K是紧的，故K/U是一个有限集，因而这样的函数的全体所组成的向量空间是有限维的。因而，$\rho(\mu_1,\mu_2)$是可容许表示。

实际上，$\rho(\mu_1,\mu_2)$是群B的一维表示：

$$\begin{pmatrix}a_1 & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\mapsto\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)$$

的诱导表示$\mathrm{Ind}_B^G(\mu_1,\mu_2)$。

令$\mathscr{F}$表示G上满足如下条件的函数f所组成的空间：

$$f\left(\begin{pmatrix}a_1 & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}g\right)=\left|\frac{a_1}{a_2}\right|f(g),$$

$$\forall g\in G,\ a_1,a_2\in F^\times,\ x\in F.$$

显然，$\mathscr{F}(\alpha_F^{1/2},\alpha_F^{-1/2})\subseteq\mathscr{F}$。$G$按右平移作用在$\mathscr{F}$上。经适当正规化后，$G$上的Haar测度满足如下条件：

$$\int_G f(g)\mathrm{d}g=\int_N\int_A\int_K\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{-1}f(nak)\mathrm{d}n\mathrm{d}a\mathrm{d}k.$$

设

$$a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}.$$

我们容易看到，积分

$$\int_K f(k)\mathrm{d}k$$

是$\mathscr{F}$上的线性型，在G的作用下不变。可以证明：存在一个正常数c，使

$$\int_G f(g)\mathrm{d}g=c\int_N\int_A\int_N\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{-1}f\left(na\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}n_1\right)\mathrm{d}n\mathrm{d}a\mathrm{d}n_1.$$

由此得

$$\int_K f(k)\mathrm{d}k = c\int_F f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\mathrm{d}x.$$

设 $\Phi_1 \in \mathscr{I}(\mu_1, \mu_2)$，$\Phi_2 \in \mathscr{I}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$，则 $\varphi_1\varphi_2 \in \mathscr{F}$。我们令

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \int_K \Phi_1(k)\Phi_2(k)\mathrm{d}k.$$

显然有

$$\langle \rho(g)\Phi_1, \rho(g)\Phi_2 \rangle = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle.$$

故 $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ 是一个不变双线性型。因为 Φ_1, Φ_2 由它们在 K 上的限制唯一决定，所以这个双线性型是非退化的。由此可以推知表示 $(\rho(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}), \mathscr{I}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}))$ 应等价于表示 $(\rho(\mu_1, \mu_2), \mathscr{I}(\mu_1, \mu_2))$ 的逆步表示。于是我们有

引理2.1 符号如上。

(1) 存在 $\mathscr{I}(\mu_1, \mu_2) \times \mathscr{I}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}) \to \mathbf{C}$ 的非退化双线性型 $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle (\Phi_1 \in \mathscr{I}(\mu_1, \mu_2), \Phi_2 \in \mathscr{I}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}))$。

(2) $\rho(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$ 与 $\rho(\mu_1, \mu_2)$ 的逆步表示等价。 ▎

为了进一步研究 G 的表示 $(\rho(\mu_1, \mu_2), \mathscr{I}(\mu_1, \mu_2))$。我们引进几个与它等价的 G 模。

以 $\mathscr{S}(F^\times)$ 记定义在 $F^\times$ 的有紧支集的局部常值函数所组成的向量空间，它通常又称为 $F^\times$ 上的 Schwartz-Bruhat 空间。同样，F 上二维仿射空间 F^2 上的 Schwartz-Bruhat 空间是指定义在 F^2 上有紧支集的局部常值函数所组成的向量空间，我们把它记作 $\mathscr{S}(F^2)$。

选定 F 的一个加性酉特征标 $\psi = \psi_F (|\psi_F| = 1)$。

G 在 $\mathscr{S}(F^2)$ 上显然有一个作用：

$$\rho(g)\Phi(x) = \Phi(xg),$$

其中 $x = (x_1, x_2) \in F^2$，而

$$xg = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax_1 + cx_2, bx_1 + dx_2).$$

对于 $F^\times$ 的特征标 μ_1, μ_2，我们来构造出 G 在 $\mathscr{S}(F^2)$ 上的一个表

示．为此，我们先证明如下的

命题2.2 符号如上．存在一个G在$\mathscr{S}(F^2)$上的表示r，满足如下条件：

(1) $r\left(\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}\right)\Phi(a,b) = |c|\Phi(ca,cb)$；

(2) $r\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(a,b) = \psi(xab)\Phi(a,b)$；

(3) $r\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\Phi(a,b) = \int_{F^2}\Phi(x,y)\psi(bx+ay)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$是F关于ψ的自对偶Haar测度；

(4) $r\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(\bar{a},b) = \rho\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(\bar{a},b)$；

(5) 以$\Phi^{\sim}$记Φ的部分Fourier变换，即

$$\Phi^{\sim}(a,b) = \int_F \Phi(a,y)\psi(by)\mathrm{d}y$$

(其中$\mathrm{d}y$是F关于ψ的自对偶Haar测度)，则

$$(r(g)\Phi)^{\sim} = \rho(g)\Phi^{\sim}.$$

证 我们这里只概略地阐述证明的基本步骤，略去详细的推导过程．

首先，群$\mathrm{SL}(2,F)$是由下列元素生成的：

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中$c\in F^{\times}$，$x\in F$．这些生成子之间满足如下关系：

(a) $w\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}w$，

(b) $w^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，

(c) $w\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}w=\begin{pmatrix}-c^{-1} & 0\\ 0 & -c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -c\\ 0 & 1\end{pmatrix}w\begin{pmatrix}1 & -c^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+x'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c' & 0\\ 0 & (c')^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cc' & 0\\ 0 & (cc')^{-1}\end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^{-1} & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & c^2x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

可以证明，以命题中的(1)，(2)，(3)三式来定义映射 r，则上面指出的关系式(a)—(f)都保持不变。由此推知 r 定义了$\mathrm{SL}(2,F)$ 在 $\mathscr{S}(F^2)$ 上的一个表示。可以验证(5)对 $\mathrm{SL}(2,F)$ 的上述生成元也成立。因而，(5)对一切 $g\in \mathrm{SL}(2,F)$都成立。借助于(5)， 将 r 的定义扩充到 $\mathrm{GL}(2,F)$，根据 r 的这种扩充后的定义，我们立刻推出(4)式成立。 ▌

下面，对 $F^\times$ 的特征标μ_1,μ_2 及 $g\in G=\mathrm{GL}(2,F)$，我们定义

$$r_{\mu_1,\mu_2}(g)=\mu_1(\det g)\,|\det g|^{1/2}\,r(g).$$

又对 $\Phi\in\mathscr{S}(F^2)$，令

$$\theta(\mu_1,\mu_2,\Phi)=\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\Phi(t,t^{-1})\,\mathrm{d}^\times t.$$

其中 $\mathrm{d}^\times t$ 是 $F^\times$ 上的一个乘性 Haar 测度。由于 Φ 有紧支集，所以上式右边的积分是收敛的。

定义2.2 对 $\Phi\in\mathscr{S}(F^2)$，令

$$W_\Phi(g)=\theta(\mu_1,\mu_2,r_{\mu_1,\mu_2}(g)\Phi),$$

而以 $W(\mu_1,\mu_2)$记由 $W_\Phi(g)$ $(\Phi\in\mathscr{S}(F^2))$所生成的向量空间。

现在让群G以右平移作用在 $W(\mu_1,\mu_2)$上，即令

$$\rho(g)W(h)=W(hg).$$

那么，我们得到G的一个表示$(\rho,W(\mu_1,\mu_2))$，这是因为

$$\rho(g)W_\Phi(h)=W_\Phi(hg)=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2,r_{\mu_1,\mu_2}(hg)\Phi)$$

$$=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2,\ r_{\mu_1,\mu_2}(h)(r_{\mu_1,\mu_2}(g)\Phi))$$

$$=W_{r_{\mu_1,\mu_2}(g)\Phi}.$$

我们再来定义 G 的另一个表示。首先引进如下的

定义2.3 对 $W_\Phi\in W(\mu_1,\mu_2)$，设

$$\phi_\Phi(a)=W_\Phi\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right),\qquad a\in F^\times.$$

由 $\{\phi_\Phi:\Phi\in\mathscr{S}(F^2)\}$ 所生成的向量空间记为 $\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$。

用下列公式定义 G 在 $\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$ 上的作用：

$$\pi(g)\phi_\Phi=\phi_{r_{\mu_1,\mu_2}(g)\Phi}.$$

由于

$$\pi(g_1g_2)\phi_\Phi=\phi_{r_{\mu_1,\mu_2}(g_1g_2)\Phi}$$

$$=\phi_{r_{\mu_1,\mu_2}(g_1)r_{\mu_1,\mu_2}(g_2)\Phi}=\pi(g_1)\pi(g_2)\phi_\Phi,$$

所以我们由此得到 G 的一个新表示 $(\pi,\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2))$。

对 $\phi\in\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$，我们有

$$\pi\left(\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\phi(x)=\psi(bx)\phi(ax).$$

这个关系式可验证如下：

$$\pi\left(\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\phi_\Phi(x)=\phi_{r_{\mu_1,\mu_2}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Phi}$$

$$=W_{r_{\mu_1,\mu_2}\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Phi}\left(\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\theta\left(\mu_1,\mu_2,r_{\mu_1,\mu_2}\left(\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\left(r_{\mu_1,\mu_2}\left(\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\Phi\right)\right)$$

$$=\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\mu_1(ax)|ax|^{1/2}\left[r\left(\begin{pmatrix}ax & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\right.$$

$$\left.\times r\left(\begin{pmatrix}1 & b/a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\Phi\right](t,t^{-1})\,\mathrm{d}^\times t$$

$$
=\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\mu_1(ax)\,|ax|^{1/2}\left[r\left(\begin{pmatrix}ax&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\right.
$$

$$
\left.\times\psi\left(\frac{b}{a}\xi\eta\right)\Phi(\xi,\eta)\right]_{\substack{\xi=t\\ \eta=t^{-1}}}\mathrm{d}^\times t
$$

$$
=\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\mu_1(ax)\,|ax|^{1/2}\left[\rho\left(\begin{pmatrix}ax&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\right.
$$

$$
\left.\times\psi\left(\frac{b}{a}\xi\eta\right)\Phi(\xi,\eta)\right]_{\substack{\xi=t\\ \eta=t^{-1}}}\mathrm{d}^\times t
$$

$$
=\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\mu_1(ax)\,|ax|^{1/2}\cdot\psi(bx)
$$

$$
\times\left[r\left(\begin{pmatrix}ax&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\Phi(\xi,\eta)\right]_{\substack{\xi=t\\ \eta=t^{-1}}}\mathrm{d}^\times t
$$

$$
=\psi(bx)\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\left[r_{\mu_1,\mu_2}\left(\begin{pmatrix}ax&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\Phi\right](t,t^{-1})\,\mathrm{d}^\times t
$$

$$
=\psi(bx)\theta\left(\mu_1,\mu_2,r_{\mu_1,\mu_2}\left(\begin{pmatrix}ax&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\Phi\right)
$$

$$
=\psi(bx)W_\Phi\left(\begin{pmatrix}ax&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\psi(bx)\phi_\Phi(ax).
$$

下面我们利用所引进的G模$(\rho,W(\mu_1,\mu_2))$和$(\pi,\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2))$来讨论$(\rho(\mu_1,\mu_2),\ \mathscr{I}(\mu_1,\mu_2))$的结构。

引理2.3 符号如上。

(1) 若$|\mu_1(\omega)\mu_2(\omega)^{-1}|=|\omega|^s$，这里$s>-1$，则对$\forall\,\Phi\in\mathscr{S}(F^2)$，函数

$$
a\mapsto\mu_2(a)^{-1}|a|^{-1/2}W_\Phi\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\right)
$$

对F的任一加性 Haar 测度可积，而且

$$
\int_F W_\Phi\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\mu_2(a)^{-1}|a|^{-1/2}\,\psi(ax)\,\mathrm{d}a
$$

$$=\int_{F^\times}\Phi^\sim(t,tx)\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|t|\mathrm{d}^\times t.$$

(2) 另一方面，有等式

$$W_\Phi\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\mu_2(a)^{-1}|a|^{-1/2}$$

$$=\mu_1(a)\mu_2(a)^{-1}\int_{F^\times}\Phi(at,t^{-1})\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\mathrm{d}^\times t,$$

而且对任意 $\phi\in\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$，存在常数 $c(\phi)$，使得集合

$$\{a\in F^\times:|a|<c(\phi)\}$$

包含 ϕ 的支集。

证 因为

$$r_{\mu_1,\mu_2}\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\Phi(t,t^{-1})$$

$$=\mu_1(a)|a|^{1/2}\,\Phi\left((t,t^{-1})\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

故

$$W_\Phi\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\mu_1(a)|a|^{1/2}\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\Phi(at,t^{-1})\mathrm{d}^\times t.$$

因而有

$$W_\Phi\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\mu_2(a)^{-1}|a|^{-1/2}$$

$$=\mu_1(a)\mu_2(a)^{-1}\int_{F^\times}\Phi(at,t^{-1})\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\mathrm{d}^\times t$$

$$\xlongequal{\text{令}t_1=at}\int_{F^\times}\Phi(t_1,at_1^{-1})\mu_1(t_1)\mu_2(t_1)^{-1}\mathrm{d}^\times t_1$$

因为 $s>-1$，所以我们有

$$\int_F\int_{F^\times}|\Phi(t,at^{-1})\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|\mathrm{d}^\times t\mathrm{d}a$$

$$=\int_F\int_{F^\times}|\Phi(t,at^{-1})||t|^s\mathrm{d}^\times t\mathrm{d}a$$

$$\xlongequal{令 at^{-1}=b}\int_F\int_{F^\times}|\Phi(t,b)||t|^{s+1}\mathrm{d}^\times t\mathrm{d}b<\infty.$$

由于上面的积分“绝对”收敛，所以我们可以作下面的计算：

$$\int_F W_\Phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\mu_2(a)^{-1}|a|^{-1/2}\ \psi(ax)\mathrm{d}a$$

$$=\int_F\psi(ax)\left\{\int_{F^\times}\Phi(t,at^{-1})\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\mathrm{d}^\times t\right\}\mathrm{d}a$$

$$=\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\left\{\int_F\Phi(t,at^{-1})\psi(ax)\mathrm{d}a\right\}\mathrm{d}^\times t$$

$$=\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|t|\left\{\int_F\Phi(t,a)\psi(axt)\mathrm{d}a\right\}\mathrm{d}^\times t$$

$$=\int_{F^\times}\Phi^\sim(t,xt)\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|t|\mathrm{d}^\times t.$$

最后，根据等式

$$W_\Phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)|a|^{-1/2}$$

$$=\mu_1(a)\int_{F^\times}\Phi(at,t^{-1})\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\mathrm{d}^\times t,$$

容易推知存在 $c(\phi)$，使 $\{a\in F^\times:|a|<c(\phi)\}$ 包含 ϕ 的支集。∎

如果 ω 是 $F^\times$ 的一个特征标，$|\omega(t)|=|t|^s$，$s>0$。则对 $\Phi\in\mathscr{S}(F^2)$，积分

$$Z(\omega,\Phi)=\int_{F^\times}\Phi(0,t)\omega(t)\mathrm{d}^\times t$$

是收敛的。根据这一事实，我们有下面的

引理2.4 设 $|\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|=|t|^s$，$s>-1$。$\Phi\in\mathscr{S}(F^2)$，$g\in\mathrm{GL}(2,F)$。令

$$f_\Phi(g)=\mu_1(\det g)|\det g|^{1/2}\cdot Z(\alpha_F\mu_1\mu_2^{-1},\rho(g)\Phi),$$

这里 $\alpha_F(t)=|t|$ 为 t 的赋值。则我们有

$$\rho(h)f_{\Phi}=f_{\mu_1(\det h)|\det h|^{1/2}\rho(h)\Phi},$$

而且$\{f_{\Phi}:\Phi\in\mathscr{S}(F^2)\}=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$。

证　我们有

$$\begin{aligned}\rho(h)f_{\Phi}(g)&=f_{\Phi}(gh)\\&=\mu_1(\det gh)|\det gh|^{1/2}Z(\alpha_F\mu_1\mu_2^{-1},\rho(gh)\Phi)\\&=\mu_1(\det g)|\det g|^{1/2}Z(\alpha_F\mu_1\mu_2^{-1},\\&\qquad\rho(g)[\mu_1(\det h)|\det h|^{1/2}\rho(h)\Phi])\\&=f_{\mu_1(\det h)|\det h|^{1/2}\rho(h)\Phi}.\end{aligned}$$

下面分三步来证明$\{f_{\Phi}:\Phi\in\mathscr{S}(F^2)\}=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$。

(1) 定义G在$\mathscr{S}(F^2)$上的作用如下：

$$\tilde{\rho}(g)=\mu_1(\det g)|\det g|^{1/2}\rho(g).$$

此时有

$$f_{\Phi}(g)=Z(\alpha_F\mu_1\mu_2^{-1},\tilde{\rho}(g)\Phi).$$

现在$U=\{g\in G:\tilde{\rho}(g)\Phi=\Phi\}$是$G$的一个开子群，而$U$内，$f_{\Phi}(g)$是一个常数。对任意$g_0\in G$，$g_0U$是$g_0$的一个开邻域．对$g\in g_0U$，有$g=g_0u(u\in U)$，而

$$\begin{aligned}f_{\Phi}(g)=f_{\Phi}(g_0u)&=Z(\alpha_F\mu_1\mu_2^{-1},\tilde{\rho}(g_0u)\Phi)\\&=Z(\alpha_F\mu_1\mu_2^{-1},\tilde{\rho}(g_0)\tilde{\rho}(u)\Phi)\\&=Z(\alpha_F\mu_1\mu_2^{-1},\tilde{\rho}(g_0)\Phi).\end{aligned}$$

由此可知f_{Φ}是G上的局部常值函数。

(2) 从上面导出的$\rho(g)$对f_{Φ}的作用公式可知

$$\rho(g)\{f_{\Phi}:\Phi\in\mathscr{S}(F^2)\}\subseteq\{f_{\Phi}:\Phi\in\mathscr{S}(F^2)\}.$$

所以，为了要证明$f_{\Phi}\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，我们先来证明

$$f_{\Phi}\left(\begin{pmatrix}a_1&x\\0&a_2\end{pmatrix}\right)=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{1/2}f_{\Phi}(1).$$

我们作如下计算：

$$\begin{aligned}&f_{\Phi}\left(\begin{pmatrix}a_1&x\\0&a_2\end{pmatrix}\right)\\&\quad=Z\left(\alpha_F\mu_1\mu_2^{-1},\rho\left(\begin{pmatrix}a_1&x\\0&a_2\end{pmatrix}\right)\Phi\right)\mu_1(a_1a_2)|a_1a_2|^{1/2}\end{aligned}$$

$$=\mu_1(a_1a_2)|a_1a_2|^{1/2}\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|t|$$

$$\times\left[\Phi\left((\xi,\eta)\begin{pmatrix}a & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\right)\right]_{\substack{\xi=0\\ \eta=t}}\mathrm{d}^\times t$$

$$=\mu_1(a_1a_2)|a_1a_2|^{1/2}\int_{F^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|t|\Phi(0,a_2t)\mathrm{d}^\times t$$

$$\xlongequal{t_1=a_2t}\mu_1(a_1a_2)|a_1a_2|^{1/2}\cdot\mu_1\left(\frac{1}{a_2}\right)\mu_2\left(\frac{1}{a_2}\right)^{-}$$

$$\times\left|\frac{1}{a_2}\right|\int_{F^\times}\mu_1(t_1)\mu_2(t_1)^{-1}|t_1|\Phi(0,t_1)\mathrm{d}^\times t_1$$

$$=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{1/2}f_\Phi(1).$$

现在，对$\forall g\in G$，有

$$f_\Phi\left(\begin{pmatrix}a & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}g\right)=\rho(g)f_\Phi\left(\begin{pmatrix}a & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{1/2}\rho(g)f_\Phi(1)$$

$$=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)|a_1/a_2|^{1/2}f_\Phi(g).$$

这就证明了$f_\Phi\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$。

(3) 现在设已给定$f(g)\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$。令

$$\Phi(x,y)$$

$$=\begin{cases}0, & 若(x,y)\neq(0,1)g,\ g\in K=\mathrm{GL}(2,\mathscr{O}_F),\\ \mu_1(\det g)^{-1}f(g), & 若(x,y)=(0,1)g,\ g\in K.\end{cases}$$

显然，$\Phi\in\mathscr{S}(F^2)$，故$f_\Phi\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$。因为$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$内的函数由它在$K$处的函数值唯一决定，所以只要对$g\in K$证明$f(g)=f_\Phi(g)$，则必有$f(g)=f_\Phi(g)(\forall g\in G)$。

因为由$(0,t)g=(0,1)g'$ $(g,g'\in K)$推出$t\in\mathscr{O}_P^\times$，所以，$t\notin\mathscr{O}_P^\times\Longrightarrow\Phi((0,t)g)=0$。故对$g\in K$，有

$$f_\Phi(g)=\mu_1(\det g)|\det g|^{1/2}$$
$$\times\int_{\mathscr{O}_P^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|t|\Phi((0,t)g)\mathrm{d}^\times t.$$

现在$|\det g|=1$，$t\in\mathscr{O}_P^\times$，故$|t|=1$，我们有

$$\Phi((0,t)g)=\Phi\left((0,1)\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix}g\right)\qquad\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix}\in K\right)$$

$$=\mu_1\left(\det\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix}g\right)\right)^{-1}f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix}g\right)$$

$$=\mu_1(\det g)^{-1}\mu_1(t)^{-1}\mu_1(1)\mu_2(t)\left|\frac{1}{t}\right|^{1/2}f(g)$$
$$=\mu_1(\det g)^{-1}\mu_1(t)^{-1}\mu_2(t)f(g).$$

代入原式，利用$\int_{\mathscr{O}_P^\times}\mathrm{d}^\times t=1$，即得

$$f_\Phi(g)=\mu_1(\det g)\int_{\mathscr{O}_P^\times}\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}\mu_1(\det g)^{-1}$$
$$\times\mu_1(t)^{-1}\mu_2(t)f(g)\mathrm{d}^\times t$$
$$=f(g)\int_{\mathscr{O}_P^\times}\mathrm{d}^\times t=f(g)\qquad(\forall g\in K).$$

由此知$\mathscr{F}(\mu_1,\mu_2)=\{f_\Phi:\Phi\in\mathscr{S}(F^2)\}$。 ▎

命题2.5 若$|\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|=|t|^s$，$s>-1$，则$(\rho,W(\mu_1,\mu_2))$和$(\rho(\mu_1,\mu_2),\mathscr{F}(\mu_1,\mu_2))$是同构的$G$模。

证 (1) 先证明，若$W_\Phi=0$ $(\Phi\in\mathscr{S}(F^2))$，则有$f_{\Phi^\sim}=0$。

因为我们有

$$f_{\Phi^\sim}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\right)=f_{\Phi^\sim}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&x\end{pmatrix}\right)$$

$$=\mu_1\left(\det\begin{pmatrix}0&-1\\1&x\end{pmatrix}\right)\left|\det\begin{pmatrix}0&-1\\1&x\end{pmatrix}\right|^{1/2}$$

$$\times Z\left(\alpha_F\mu_1\mu_2^{-1}, \rho\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\right)\Phi^{\sim}\right)$$

$$= \int_{F^\times} \mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|t|\Phi^{\sim}(t, xt)\mathrm{d}^\times t,$$

根据引理2.3的(1)，我们有

$$f_{\Phi^{\sim}}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \int_F W_{\Phi}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\mu_2(a)^{-1}|a|^{-1/2}\psi(ax)\mathrm{d}a = 0.$$

于是 $f_{\Phi^{\sim}}$ 在$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}N$上处处为零。另一方面，从引理2.4已知

$f_{\Phi^{\sim}} \in \mathscr{I}(\mu_1, \mu_2)$，所以 $f_{\Phi^{\sim}}$ 在$B\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}N$上处处为零。对群 G，有 Bruhat 分解式：

$$G = B \cup B\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}N,$$

特别是，$B\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}N$ 是 G 的稠密开子集，由此知 $f_{\Phi^{\sim}} = 0$。

(2) 从(1)的结果出发，我们定义映射

$$\mathscr{A}: W(\mu_1, \mu_2) \to \mathscr{I}(\mu_1, \mu_2),$$

使对 $\forall \Phi \in \mathscr{S}(F^2)$，有

$$\mathscr{A}(W_{\Phi}) = f_{\Phi^{\sim}}.$$

从引理2.4知$\mathscr{A}$是一个满射。

(3) 我们来证$\mathscr{A}$是一个 G 模同态，即证明：$\forall g \in G$，有 $\rho(g)\mathscr{A}(W_{\Phi}) = \mathscr{A}(\rho(g)W_{\Phi})$。

从引理2.4中的公式得出

$$\rho(g)\mathscr{A}(W_{\Phi}) = \rho(g)f_{\Phi^{\sim}} = f_{\mu_1(\det g)|\det g|^{1/2}\rho(g)\Phi^{\sim}}$$

$$= f_{\mu_1(\det g)|\det g|^{1/2}(r(g)\Phi)^{\sim}}$$

$$= f_{(r_{\mu_1,\mu_2}(g)\Phi)^{\sim}} = \mathscr{A}(W_{r_{\mu_1,\mu_2}(g)\Phi})$$

$$= \mathscr{A}(\rho(g)W_\Phi)。$$

（4）我们来证$\mathscr{A}$是单射。

首先，若$f_{\Phi^\sim}=0$，则由公式

$$\int_F W_\Phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\mu_2(a)^{-1}|a|^{-\frac{1}{2}}\psi(ax)\mathrm{d}a$$

$$= f_{\Phi^\sim}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

可推知$W_\Phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$对几乎所有的$a$等于零。但$W_\Phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ $=\phi(a)\in\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$是$F^\times$上的局部常值函数，由此推知：对$\forall a\in F^\times$，$W_\Phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=0$。于是，对任意$g\in G$，有

$$W_\Phi(g)=\rho(g)W_\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=0。$$

这表明，由$\mathscr{A}(W_\Phi)=f_{\Phi^\sim}=0$推出$W_\Phi=0$，即$\mathscr{A}$是单射。

综合上面的结果，即知$\mathscr{A}$是$(\rho, W(\mu_1,\mu_2))$到$(\rho, \mathscr{I}(\mu_1,\mu_2))$的$G$模同构映射。▌

命题2.6 设$|\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|=|t|^s, s>-1$。则$(\rho, W(\mu_1,\mu_2))$和$(\pi, \mathscr{K}(\mu_1,\mu_2))$是同构的$G$模。

证 定义映射

$$\mathscr{A}: W(\mu_1,\mu_2)\to\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2),$$

使对$\forall\Phi\in\mathscr{S}(F^2)$，有

$$\mathscr{A}(W_\Phi)=\phi_\Phi。$$

按$W(\mu_1,\mu_2)$和$\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$的定义易知$\mathscr{A}$是满射。又若

$$\mathscr{A}(W_\Phi)=\phi_\Phi(a)=W_\Phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=0,$$

参照命题2.5证明中所用的方法立刻推知$W_\Phi=0$，故$\mathscr{A}$是单射。再来证$\mathscr{A}$是G模同态。我们有

$$\pi(g)\mathscr{A}(W_\phi)=\pi(g)\phi_\phi=\phi_{r_{\mu_1,\mu_2}(g)\phi}$$
$$=\mathscr{A}W_{r_{\mu_1,\mu_2}(g)\phi}=\mathscr{A}\rho(g)(W_\phi),$$

故 $\pi(g)\mathscr{A}=\mathscr{A}\rho(g)$，即$\mathscr{A}$是 G 模同构. ▌

引理2.7 考虑 G 的如下子群

$$P=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}:\ a\in F^\times, b\in F\right\}.$$

定义 P 在$\mathscr{S}(F^\times)$上的表示 ξ_ψ 如下：

$$\xi_\psi\left(\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\phi(c)=\psi(bc)\phi(ac),\qquad \forall c\in F^\times.$$

则 ξ_ψ 为不可约表示.

证 (1) 设 $W\neq\{0\}$是$(\xi_\psi,\mathscr{S}(F^\times))$的一个不变子空间. 取 $0\neq\rho\in W$，定义子空间

$$V=\sum_{\varepsilon\in\mathscr{O}_F^\times}\boldsymbol{C}\xi_\psi\left(\begin{pmatrix} \varepsilon & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\rho,$$

它可以看作紧子群 $\mathscr{O}_F^\times$ 的一个表示空间，这时 V 可以分解为 $\mathscr{O}_F^\times$ 不可约表示的直和. 但 $\mathscr{O}_F^\times$ 是紧交换群，它的不可约表示都是一维的，即为其特征标. 故有 $V=\sum V_\nu$，其中 V_ν 为特征标 ν 所对应的一维不变子空间. 设 $V_\nu\neq\{0\}$. 任取 $0\neq\bar\phi\in V_\nu$，则有

$$\bar\phi(a\varepsilon)=\xi_\psi\left(\begin{pmatrix} \varepsilon & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\bar\phi(a)=\nu(\varepsilon)\bar\phi(a).$$

因 $\bar\phi\neq 0$，设 $b\in F^\times$，使 $\bar\phi(b)\neq 0$. 令 $\phi(x)=\bar\phi(bx)$，则$\phi(1)=\bar\phi(b)\neq 0$，且对 $a\in F^\times$，$\varepsilon\in\mathscr{O}_F^\times$，有

$$\phi(a\varepsilon)=\bar\phi(ab\varepsilon)=\nu(\varepsilon)\bar\phi(ab)=\nu(\varepsilon)\phi(a).$$

(2) 对 $\mathscr{O}_F^\times$ 的任意酉特征标 μ，定义$\mathscr{S}(F^\times)$内的函数

$$\phi_\mu(x)=\begin{cases}\mu(x), & 若\ x\in\mathscr{O}_F^\times,\\ 0, & 若\ x\overline{\in}\mathscr{O}_F^\times.\end{cases}$$

我们来证明：若 $\mu\neq\nu$（ν 为(1)中选定的$\mathscr{O}_F^\times$的特征标)，则必有

$\phi_\mu \in W$.

令

$$\phi'(a)=\int_{\mathscr{O}_p^\times}\mu(t)^{-1}\left[\xi_\psi\left(\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\xi_\psi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\phi(a)\right]\mathrm{d}^\times t,$$

其中 x 为 F 中一个待定的元素。由于 $\phi\in W$，W 是 ξ_ψ 的不变子空间，故由上式可知 $\phi'\in W$。由于

$$\xi_\psi\left(\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\xi_\psi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\phi(c)=\psi(txc)\phi(tc),$$

所以

$$\phi'(a\varepsilon)=\int_{\mathscr{O}_p^\times}\mu(t)^{-1}\psi(txa\varepsilon)\phi(ta\varepsilon)\mathrm{d}^\times t$$

$$\overset{t_1=\varepsilon t}{=\!=\!=}\mu(\varepsilon)\int_{\mathscr{O}_p^\times}\mu(t_1)^{-1}\psi(t_1xa)\phi(t_1a)\mathrm{d}^\times t_1$$

$$=\mu(\varepsilon)\int_{\mathscr{O}_p^\times}\mu(t)^{-1}\xi_\psi\left(\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\xi_\psi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\phi(a)\mathrm{d}^\times t$$

$$=\mu(\varepsilon)\phi'(a).$$

另一方面，从关系式 $\phi(a\varepsilon)=\nu(\varepsilon)\phi(a)$，我们有

$$\phi'(a)=\int_{\mathscr{O}_p^\times}\mu(t)^{-1}\psi(txa)\phi(ta)\mathrm{d}^\times t$$

$$=\phi(a)\int_{\mathscr{O}_p^\times}\mu(t)^{-1}\nu(t)\psi(txa)\mathrm{d}^\times t$$

$$=\phi(a)\cdot G(a).$$

设 $\mathfrak{p}^{-m}$ 是使 $\psi|_{\mathfrak{p}^{-m}}=1$ 的最大理想，$\mathfrak{p}^n$ 为使

$$\mu^{-1}\nu|_{1+\mathfrak{p}^n}=1$$

的最大理想。取 $x\in\mathfrak{p}^{-m-n}$。若 $a\in\mathfrak{p}^l$，则 $\mathfrak{p}^{n-l}$ 是使

$$\psi(txa)=1,\qquad \forall t\in\mathfrak{p}^{n-l}$$

的最大理想。

分两种情况来计算上面出现的积分 $G(a)$。

(a) $a\in\mathscr{O}_p^\times$。此时

$$G(a)=\int_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times}\mu(t)^{-1}\nu(t)\psi(txa)\mathrm{d}^\times t$$

$$\xlongequal{t_1=at}\mu^{-1}\nu\left(\frac{1}{a}\right)\int_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times}\mu^{-1}\nu(t_1)\psi(t_1x)\mathrm{d}^\times t_1.$$

选取 $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times \bmod (1+\mathfrak{p}^n)$的一组代表元素$\{u\}$，则

$$\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times=\bigcup_{u\in\{u\}}u(1+\mathfrak{p}^n),$$

$$\mu^{-1}\nu(u(1+\mathfrak{p}^n))=\mu^{-1}\nu(u).$$

于是

$$\int_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times}\mu^{-1}\nu\psi(tx)\mathrm{d}^\times t=\sum_{u\in\{u\}}\mu^{-1}\nu(u)\int_{1+\mathfrak{p}^n}\psi(tux)\mathrm{d}^\times t.$$

但

$$\begin{aligned}t\in 1+\mathfrak{p}^n&\Longrightarrow t=1+s,\quad s\in\mathfrak{p}^n\\&\Longrightarrow sux\in\mathfrak{p}^{-m}\\&\Longrightarrow\psi(tux)=\psi(ux)\psi(sux)=\psi(ux).\end{aligned}$$

故

$$\int_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times}\mu^{-1}\nu(t)\psi(tx)\mathrm{d}^\times t=\sum_{u\in\{u\}}\mu^{-1}\nu(u)\psi(ux)\int_{1+\mathfrak{p}^n}\mathrm{d}^\times t.$$

代回原式，即得

$$G(a)=\mu^{-1}\nu\left(\frac{1}{a}\right)\left(\sum_{u\in\{u\}}\mu^{-1}\nu(u)\psi(ux)\right)\mathrm{vol}(1+\mathfrak{p}^n).$$

由于Gauss和$\sum_{\{u\}}\mu^{-1}\nu(u)\psi(ux)\neq 0$，故此时$G(a)\neq 0$.

(b) $a\in\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$. 此时，若$n\leqslant l$，则有$\mathfrak{p}^{n-l}\supseteq\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$. 于是，当$t\in\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$时，有$\psi(txa)=1$. 此时

$$G(a)=\int_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times}\mu^{-1}(t)\nu(t)\psi(txa)\mathrm{d}^\times t=\int_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times}\mu^{-1}\nu(t)\mathrm{d}^\times t.$$

现在$\mu\neq\nu$,故$\mu^{-1}\nu$是$\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$上的非平凡特征标. 对$\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$上任一非平凡特征标$\omega(t)$，若$\int_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times}\omega(t)\mathrm{d}^\times t\neq 0$，则利用积分的不变性，有

$$\int_{\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}}\omega(t)\mathrm{d}^{\times}t=\int_{\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}}\omega(t't)\mathrm{d}^{\times}t=\omega(t')\int_{\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}}\omega(t)\mathrm{d}^{\times}t.$$

由此推知 $\omega(t')=1(\forall t'\in\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times})$，这与$\omega$为非平凡特征标矛盾。由此即知此时应有$G(a)=0$。

当$n>l$时，$1+\mathfrak{p}^{n-l}\supsetneqq 1+\mathfrak{p}^{n}$，则$\mu^{-1}\nu$作为群$1+\mathfrak{p}^{n-l}$上的特征标不恒等于1．设$\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$有陪集分解式

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}=\bigcup_{(v)}v(1+\mathfrak{p}^{n-l}),$$

则

$$\begin{aligned}G(a)&=\int_{\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}}\mu^{-1}\nu(t)\psi(txa)\mathrm{d}^{\times}t\\&=\sum_{(v)}\psi(vax)\mu^{-1}\nu(v)\int_{1+\mathfrak{p}^{n-l}}\mu^{-1}\nu(t)\mathrm{d}^{\times}t\\&=0\end{aligned}$$

（其中用到如下事实：若$t\in v(1+\mathfrak{p}^{n-l})$，则$t=v+vt'$，这里$t'\in\mathfrak{p}^{n-l}$，$txa=vxa+t'(vx)a$，$x\in\mathfrak{p}^{-n-m}$，而因$v\in\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$，故$vx\in\mathfrak{p}^{-n-m}$，因而$\psi(txa)=\psi(vxa)$）.

综合上面的讨论，我们得到：

$$\begin{aligned}\phi'(a\varepsilon)&=\mu(\varepsilon)\phi'(a),\quad a\in F^{\times},\ \varepsilon\in\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times},\\\phi'(a)&=\phi(a)G(a),\end{aligned}$$

其中

$$G(a)\begin{cases}=0, & 若a\overline{\in}\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times},\\\neq 0, & 若a\in\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}.\end{cases}$$

在上面的式子中取$a=1$，则得

$$\begin{aligned}\phi'(\varepsilon)&=\mu(\varepsilon)\phi'(1)\qquad(\varepsilon\in\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}),\\\phi'(1)&=\phi(1)G(1)\neq 0.\end{aligned}$$

于是，$\phi'(a)=\phi'(1)\phi_{\mu}(a)$。因为$\phi'(a)\in W$，故$\phi_{\mu}\in W$。

根据上面的讨论，当$\mu\neq\nu$时，我们能找到$\phi\in W$，使$\phi_{\mu}\in W$．因为$\mathscr{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$至少有两个不相等的酉特征标$\mu,\nu$，所以，在证明了$\phi_{\mu}\in$

W后，以(ϕ_μ,μ)代替(ϕ,ν)，重复上面的论证，可知$\phi_\mu\in W$．这样，对$\mathscr{O}_\nu$的所有酉特征标μ，都有$\phi_\mu\in W$．而$\mathscr{S}(F^\times)$是由ϕ_μ及

$$\xi_\psi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\phi_\mu(c)=\phi_\mu(ac)$$

生成的，故应有$W=\mathscr{S}(F^\times)$。这表明$(\xi_\psi,\mathscr{S}(F^\times))$不可约。

引理2.8　若$|\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|=|t|^s$，$s>-1$，则在$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$内存在最小非零不变子空间$X$，使$\forall f\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，$n\in N$，都有$f-\rho(n)f\in X$。

证　根据命题2.5和2.6，存在G模同构

$$\mathscr{A}:W(\mu_1,\mu_2)\to\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2),\quad \mathscr{A}(W_\Phi)=f_{\Phi^\sim},$$
$$\bar{\mathscr{A}}:W(\mu_1,\mu_2)\to\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2),\quad \bar{\mathscr{A}}(W_\Phi)=\phi_\Phi.$$

于是有$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$到$\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$的G模同构$\bar{\mathscr{A}}\mathscr{A}^{-1}$．这样，我们可以把问题转移到$\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$中来讨论。而$\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$是$F^\times$上的函数$\phi_\Phi(\Phi\in\mathscr{S}(F^2))$所组成的向量空间。我们来考察它与$\mathscr{S}(F^\times)$的关系。

设$\mathfrak{p}^{-m}$是使$\psi|_{\mathfrak{p}^{-m}}=1$的最大理想。取$\phi\in\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$，$n=\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in N$。令

$$\begin{aligned}\phi'(a)&=\phi(a)-\pi(n)\phi(a)\\&=(1-\psi(ay))\phi(a)\in\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2).\end{aligned}$$

当$y=0$时，$\phi'=0$，当$y\neq0$时，$\phi'|_{y^{-1}\mathfrak{p}^{-m}}=0$。根据引理2.3的(2)可知，$\phi$的支集包含于集合$\{a\in F^\times:|a|<c(\phi)\}$之中。由此知$\phi'$是$F^\times$上具有紧支集的局部常值函数。这样，$\forall\phi\in\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$，$n\in N$，有

$$\phi-\pi(n)\phi\in\mathscr{S}(F^\times)\cap\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2).$$

故$\mathscr{S}(F^\times)\cap\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)\neq\{0\}$.

现设W是$(\pi,\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2))$的一个不变子空间，考察$G$的子群$P$，我们有$\pi|_P=\xi_\psi$。故$\mathscr{S}(F^\times)\cap W$是$(\xi_\psi,\mathscr{S}(F^\times))$的不变子空

间，若$W\neq\{0\}$，则因 $\psi\neq1$，故对 $0\neq\phi\in W$，可找到$n\in N$，使$\phi-\pi(n)\phi\neq0$，于是$\mathscr{S}(F^\times)\cap W\neq\{0\}$。但由引理2.7知$\xi_\psi$不可约，由此即知 $W\supseteq\mathscr{S}(F^\times)$。取$Y$为$\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$的所有非零不变子空间的交。则$Y$是$(\pi,\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2))$的最小非零不变子空间，使对一切$\phi\in\mathscr{K}(\mu_1,\mu_2)$，$n\in N$，有$\phi-\pi(n)\phi\in Y$。令$X=\mathscr{A}\overline{\mathscr{A}}^{-1}(Y)$，则$X\subseteq\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$具有引理所要求的性质。▎

引理2.9 设$0\neq f\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，$\forall n\in N$，$\rho(n)f=f$。则存在$F^\times$的特征标$\chi$，使

$$\mu_1=\chi\alpha_F^{-1/2},\qquad \mu_2=\chi\alpha_F^{1/2},$$

而且$f(g)=$常数$\cdot\chi(\det g)$。

证 取$c\in F^\times$，我们有

$$\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c^{-1}&1\\0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c^{-1}\\0&1\end{pmatrix}.$$

令$\omega=\mu_1^{-1}\mu_2\alpha_F^{-1}$。若$f$满足$\rho(n)f=f$，又已知$f\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，所以我们有

$$\begin{aligned}f\left(\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}\right)&=\mu_1(c^{-1})\mu_2(c)|c|^{-1}f\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\right)\\&=\mu_1(c)^{-1}\mu_2(c)|c|^{-1}\rho\left(\begin{pmatrix}1&c^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\right)f\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)\\&=\omega(c)f\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

因为f是局部常值函数，故应存在理想$\mathfrak{a}$，使ω在$\mathfrak{a}-\{0\}$上是常值。取定$x_0\in\mathfrak{a}-\{0\}$，则对$\forall x\in\mathscr{O}_F$，$x\neq0$，有$xx_0\in\mathfrak{a}-\{0\}$，故

$$\omega(xx_0)=\omega(x)\omega(x_0)=\omega(x_0),$$

由此推知 $\omega(x)=1$（$\forall x\in\mathscr{O}_F\backslash\{0\}$）。而$\omega$为群$F^\times$的特征标，而$F$为$\mathscr{O}_F$的商域。由此推知$\omega\equiv1$。

现在令$\chi=\mu_1\alpha^{1/2}=\mu_2\alpha_F^{-1/2}$，则

$$\mu_1=\chi\alpha_F^{-1/2},\quad \mu_2=\chi\alpha_F^{1/2}.$$

设

$$g=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\in NA\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}N.$$

则对满足$\rho(n)f=f$的函数$f\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，有

$$f(g)=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{1}{2}}f\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\chi(a_1a_2)f\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\text{常数}\cdot\chi(\det g).$$

因为 $NA\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}N$ 是G的开稠密子集，故$\forall g\in G$，上面的等式都成立。▎

在做了上面一系列准备工作之后，我们现在可以叙述和证明本节的主要定理了.

定理2.10 设μ_1,μ_2是$F^\times$的特征标.

(1) 若 $\mu_1\mu_2^{-1}\neq\alpha_F$，$\alpha_F^{-1}$，则 $(\rho(\mu_1,\mu_2),\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2))$是不可约$G$模。任一个与$\rho(\mu_1,\mu_2)$等价的$G$模记为$\pi(\mu_1,\mu_2)$。

(2) 若$\mu_1\mu_2^{-1}=\alpha_F$，取$F^\times$的特征标χ，使

$$\mu_1=\chi\alpha_F^{1/2},\qquad \mu_2=\chi\alpha_F^{-1/2}$$

则$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$只有一个无限维不变子空间 $\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$，并且此时$(\rho(\mu_1,\mu_2),\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2))$不可约。任何与此表示等价的表示我们记为$\sigma(\mu_1,\mu_2)$。令

$$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)/\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2),$$

则$\dim\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=1$，且$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\mathbf{C}[\chi(\det)]^{-1}$,任何与$\rho(\mu_1,\mu_2)$在$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)$上诱导出的表示等价的表示我们记为$\pi(\mu_1,\mu_2)$。

证 (1) 由引理2.1，我们知道可以在 $\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)\times\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})$上定义非退化配对$\langle\cdot,\cdot\rangle$. 先假设

$$|\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|=|t|^s,\quad s>-1.$$

取X为引理2.8中的最小非零不变子空间，此时X的正交补$X^{\perp}\subseteq \mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})$。对$\forall \psi\in X^{\perp}$，$n\in N$，$f\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，有$f-\rho(n)f \in X$，故

$$
\begin{aligned}
0&=\langle f-\rho(n)f,\psi\rangle=\langle f,\psi\rangle-\langle\rho(n)f,\psi\rangle\\
&=\langle f,\psi\rangle-\langle\rho(n)f,\rho(n)\rho(n^{-1})\psi\rangle\\
&=\langle f,\psi\rangle-\langle f,\rho(n^{-1})\psi\rangle\\
&=\langle f,\psi-\rho(n^{-1})\psi\rangle.
\end{aligned}
$$

由于f,n的任意性，及双线性型非退化，由上式可以推知：$\forall n\in N$，有$\rho(n)\psi=\psi$。按引理2.9，当$X^{\perp}\neq 0$时（注意$\psi\in\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})$），存在$F^{\times}$的特征标$\chi$，使

$$\mu_1^{-1}=\chi\alpha_F^{-1/2},\qquad \mu_2^{-1}=\chi\alpha_F^{1/2}.$$

于是

$$\mu_1\mu_2^{-1}=\chi^{-1}\cdot\alpha_F^{1/2}\cdot\chi\cdot\alpha_F^{1/2}=\alpha_F,$$

与假设矛盾。故必有$X^{\perp}=0$。则$X=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$。这表明，$(\rho(\mu_1,\mu_2),\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2))$是不可约$G$模。此时，其逆步表示：$(\rho(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1}),\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1}))$也是不可约的（因为逆步表示的真不变子空间的正交补是$\rho(\mu_1,\mu_2)$的真不变子空间）。

如果$|\mu_1(t)\mu_2(t)^{-1}|=|t|^s$，而$s<-1$。那么

$$|\mu_1(t)^{-1}(\mu_2(t)^{-1})^{-1}|=|t|^{-s},\qquad -s>-1.$$

按照上面的结果可知$\rho(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})$的逆步表示$\rho(\mu_1,\mu_2)$是不可约的。

(2) 若$\mu_1\mu_2^{-1}=\alpha_F$。取$F^{\times}$的特征标χ，使

$$\mu_1=\chi\alpha_F^{1/2},\qquad \mu_2=\chi\alpha_F^{-1/2}.$$

按引理2.8，取$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$的最小非零不变子空间X为$\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$，那么$X^{\perp}\subseteq\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})$，且$X^{\perp}$任一非零元$\psi$（如果存在的话）都满足$\rho(n)\psi=\psi(\forall n\in N)$。现令

$$\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})^N=\{\phi\in\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1}):\rho(n)\phi=\phi,\ \forall n\in N\},$$

则$X^{\perp}\subseteq\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})^N$。按引理2.9，$\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})^N$中任一非零元素$\phi=$常数$\cdot\chi^{-1}(\det)$（因为$\mu_1^{-1}=\chi^{-1}\alpha_F^{-1/2},\mu_2^{-1}=\chi^{-1}\alpha_F^{1/2}$）。我们

又有

$$\rho(n)\chi^{-1}(\det g)=\chi^{-1}(\det(gn))=\chi^{-1}(\det g)\qquad(\det n=1)$$

故$\chi^{-1}(\det)\in\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})^N$，于是$\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})^N=\boldsymbol{C}(\chi^{-1}(\det))$ 是一维子空间。

考察$\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})^N$在$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$ 内的正交补Y。任取 $f\in Y$，我们有

$$\begin{aligned}\langle\rho(g)f(h),\chi^{-1}(\det h)\rangle&=\langle f(h),\rho(g^{-1})\chi^{-1}(\det h)\rangle\\&=\langle f(h),\chi^{-1}(\det hg^{-1})\rangle\\&=\langle f,\chi^{-1}(\det h)\cdot\chi^{-1}(\det g^{-1})\rangle=0,\end{aligned}$$

故Y是$\rho(\mu_1,\mu_2)$的不变子空间，于是$Y\supseteq X$。但这又表明$\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})^N\subseteq X^{\perp}$，从而$X^{\perp}=\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})^N$。

$\rho(\mu_1,\mu_2)$的任意非零不变子空间W都包含$X=\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$，从而其正交补$W^{\perp}\subseteq X^{\perp}$。但$\dim X^{\perp}=1$，由此知$\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$是$\rho(\mu_1,\mu_2)$的唯一真不变子空间，$(\rho(\mu_1,\mu_2),\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2))$显然是不可约$G$模。

选取$f\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，使$\langle f,\chi^{-1}(\det)\rangle=1$。任取$g\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$，设$\langle g,\chi^{-1}(\det)\rangle=a$，则

$$\begin{aligned}\langle g-af,\chi^{-1}(\det)\rangle&=\langle g,\chi^{-1}(\det)\rangle-a\langle f,\chi^{-1}(\det)\rangle\\&=a-a=0,\end{aligned}$$

即$g-af\in X=\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$，由此知

$$\dim\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\dim\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)/\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)=1.$$

$\rho(\mu_1,\mu_2)$在$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)$上诱导的表示显然与$\rho(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})$在$\mathscr{I}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1})^N$内的表示等价。因而我们可以写成

$$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\boldsymbol{C}\chi^{-1}(\det)。\quad \blacksquare$$

到此为止，我们已经把诱导表示$(\rho(\mu_1,\mu_2),\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2))$的结构讨论清楚了。通过讨论这个$G$模的结构，我们得出群$G$的两大类不可约的可容许表示$\pi(\mu_1,\mu_2)$和$\sigma(\mu_1,\mu_2)$。它们和第一章讨论$\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$的不可约的可容许表示中所得出的两种类型大致相当。

但是，对于局部域F上的群$GL(2,F)$，它的不可约表示还有另外的类型出现。在下面一节中，我们将对此作一些简单的讨论。

最后，我们指出下列事实：

(1) 若$\mu_1\mu_2^{-1}\neq \alpha_F, \alpha_F^{-1}$，则$\rho(\mu_1,\mu_2)$与$\rho(\mu_2,\mu_1)$等价（这时它们都是不可约$G$模）；

(2) 若$\mu_1\mu_2^{-1}=\alpha_F$，我们令$\mu_1=\chi\alpha_F^{1/2}$，$\mu_2=\chi\alpha_F^{-1/2}$（$\chi$为$F^\times$的一个特征标）。此时$\mathscr{I}(\mu_2,\mu_1)$包含唯一的一维真不变子空间$C(\chi(\det))=\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)$，$G$模$\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$和$\mathscr{I}(\mu_2,\mu_1)/\mathscr{I}_f(\mu_2,\mu_1)$等价，而$G$模$\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)/\mathscr{I}_\sigma(\mu_1,\mu_2)$和$\mathscr{I}_f(\mu_2,\mu_1)$也等价。

上面两个结论的证明此处从略。

§3 Jacquet模

上一节最后我们已指出，并非所有可容许的不可约G模（这里$G=GL(2,F)$）都与$\pi(\mu_1,\mu_2)$，$\sigma(\mu_1,\mu_2)$之一等价。于是，自然要问：在什么情况下，一个可容许的不可约G模与$\pi(\mu_1,\mu_2)$或$\sigma(\mu_1,\mu_2)$之一等价呢？本节就来回答这个问题。

定义3.1 设给定群$G=GL(2,F)$的表示(π,V)，令$V(N)$表示由向量组$\{\pi(n)v-v: v\in V, n\in N\}$所生成的$V$的子空间，又令$V_N=V/V(N)$。称$V_N$为$(\pi,V)$的**Jacquet模**。

对$v\in V$，以$[v]$表$v+V(N)$。因为我们有

$$\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_1}{a_2}y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},$$

所以对$b=na\in NA(n\in N, a\in A)$，我们有

$$\begin{aligned}\pi(b)(\pi(n')v-v)&=\pi(bn')v-\pi(b)v\\&=\pi(nan')v-\pi(b)v=\pi(nn''a)v-\pi(b)v\\&=\pi(n''na)v-\pi(b)v=\pi(n'')(\pi(b)v)-\pi(b)v.\end{aligned}$$

这表明$\pi(B)V(N)\subseteq V(N)$。于是，我们得到群$B=NA$在商空间V_N上的诱导表示：

$$\pi(b)[v]=[\pi(b)v],\quad \forall b\in B, v\in V.$$

因为

$$\pi(n)[v]-[v]=[\pi(n)v-v]=[0],$$

故$\pi(n)=\mathrm{id}_{V_N}$。从而B在Jacquet 模V_N上的表示是群$A\cong B/N$的表示。

定义3.2 如果群G的无限维不可约表示(π,V)的Jacquet 模$V_N=0$，则称为**尖性**(cuspidal)**表示**。

定理3.1 设(π,V)是群G的可容许不可约表示，如果π不是尖性表示，则(π,V)与$\pi(\mu_1,\mu_2)$或$\sigma(\mu_1,\mu_2)$等价。

证 因为(π,V)不可约，任取$0\neq v\in V$，则有：$\{\pi(G)v\}=V$。因为π是光滑表示，故存在K的开子群K'，使$\pi(k)v=v(\forall k\in K')$。取$k_i\in K$，使

$$K=\bigcup_{i=1}^{n}k_iK'$$

为左陪集分解。根据Iwasawa分解式：$G=NAK=BK$，如把V看作B模，则它是由$\pi(k_1)v,\cdots,\pi(k_n)v$生成的。现在Jacquet 模$V_N$非零，它又是有限生成的$A$模，因而必存在$V$的子空间$V'$，使$V(N)\subseteq V'\subseteq V$，而$V/V'$是不可约$B/N\cong A$模。但$A$是Abel群，它的有限维不可约表示都是一维的，所以，我们有$\dim(V/V')=1$。注意到$A\cong F^\times\times F^\times$，我们得知：存在$F^\times$的特征标$\mu_1,\mu_2$，使

$$\pi(na)[v]=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{1}{2}}[v],$$

其中$[v]\in V/V'$，而

$$n\in N,\qquad a=\begin{pmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{pmatrix}\in A.$$

取定V/V'到$\boldsymbol{C}$的域同构映射σ，令$\sigma[v]=\{v\}$。对任意$v\in V$，定义G上函数如下：

$$\phi_v(g)=\{\pi(g)v\}.$$

此时，我们有

$$\phi_v\left(\begin{pmatrix}a_1 & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}g\right)=\left\{\pi\left(\begin{pmatrix}a_1 & x\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\right)\pi(g)v\right\}$$

$$=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{1}{2}}\phi_v(g).$$

又因为(π,V)是光滑表示，$\{g:\pi(g)v=v\}$是G的开子群，由此即知ϕ_v是G上的局部常值函数。综上所述，可断定：$\phi_v\in\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$。因而我们有映射

$$\tau:V\to\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2),\quad \tau(v_1)=\phi_{v_1}(\forall v_1\in V).$$

因为$\pi(G)v_1=V$，故当$v_1\neq0$时，$\phi_{v_1}\neq0$。这表明τ是一个单射。

对$\forall v_1\in V$，我们有

$$\tau(v_1)=\phi_{v_1}(h)=\{\pi(h)v_1\},$$

故

$$\rho(g)\tau(v_1)=\rho(g)\phi_{v_1}(h)=\phi_{v_1}(hg)$$
$$=\{\pi(hg)v_1\}.$$

另一方面，我们又有

$$\tau\pi(g)v_1=\phi_{\pi(g)v_1}(h)=\{\pi(h)\pi(g)v_1\}$$
$$=\{\pi(hg)v_1\}.$$

从而$\rho(g)\tau=\tau\pi(g)$，即下图交换：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & \mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)\\ {\scriptstyle\pi(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho(\mu_1,\mu_2)}\\ V & \xrightarrow{\tau} & \mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)\end{array}$$

由此立知(π,V)与$\pi(\mu_1,\mu_2)$或$\sigma(\mu_1,\mu_2)$等价。▎

习 题 二

1．把$G=\mathrm{GL}(2,F)$看成$M(2,F)\approx F^4$的子集。F的拓扑决定

$M(2,F)$的拓扑，在G上取诱导拓扑．设

$$K_0=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}:\ a,b,c,d\in\mathscr{O},\ ad-bc\in\mathscr{O}^\times\right\},$$

$$K_n=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in K_0:\ a\equiv d\equiv 1(\mathrm{mod}\,\mathrm{p}^n),\ b\equiv c\equiv 0(\mathrm{mod}\,\mathrm{p}^n)\right\},$$

其中 n 为正整数．证明：$\{K_n:n\geqslant 0\}$是G的单位元1的邻域基．（所以G是完全不连通拓扑群．）

2．设$G=\mathrm{GL}(2,F)$，$K=\mathrm{GL}(2,\mathscr{O})$，

$$B=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}:\ a_1,a_2\in F^\times,x\in F\right\}.$$

取

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G,\quad k=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\in K,\quad b=\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\in B.$$

考虑方程组

$$\begin{cases} a\alpha+b\gamma=a_1, \\ c\alpha+d\gamma=0. \end{cases}$$

如果$d/c\in\mathscr{O}$，则取$a_1=(ad-bc)/c,\ \delta=0,\beta=1$；如果$d/c\overline{\in}\mathscr{O}$，则取 $a_1=(ad-bc)/d$．这样证明对 $g\in G$ 存在 $k\in K$，使得 $gk=b\in B$．（即有Iwasawa分解$G=BK$．）

3．设$\mathscr{P}=\pi\mathscr{O}^\times$，$\Delta=\left\{\begin{pmatrix} \pi^{\nu_1} & 0 \\ 0 & \pi^{\nu_2} \end{pmatrix}:\ \nu_1,\nu_2\in\boldsymbol{Z}\right\}$，$K$ 如上题．如果

$$g\in N\begin{pmatrix} u_1\pi^{\nu_1} & 0 \\ 0 & u_2\pi^{\nu_2} \end{pmatrix}K,\quad u_1u_2\in\mathscr{O}^\times,$$

证明存在唯一的$\delta\in\Delta$，使得$g\in N\delta K$．

（注意：$B\cap K=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}:\ a_1,a_2\in\mathscr{O}^\times,\ x\in\mathscr{O}\right\}$．如果有 $\delta',\delta''\in\Delta$，使得$\delta'\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta''\in K$，则 $\delta'=\delta''$．）

4. 设X是完全不连通空间，以$C_c(X)$记X上复值紧支集连续函数所组成的向量空间. 以C_c^∞记$C_c(X)$中的局部常值函数组成的子集。

(1) 如果X是紧空间,则证明$C_c^\infty(X)$是$C_c(X)$的稠密子集(注意在这里，对范数

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

$C_c(X)$是Banach空间)。

(2) 设局部紧空间$X = \bigcup_{n>0} X_n$, X_n是开紧子集, $X_{n+1} \supseteq X_n$。证明$C_c^\infty(X)$的非负线性形可扩张为$C_c(X)$的非负线性形.

5. 设$\mathscr{I}$是定义2.1中的诱导表示，则$\mathscr{I}|_K$是K在$C_c^\infty(K)$上的右正则表示的子表示. 证明$\mathscr{I}$是可容许表示.

6. 以$\mu a^{1/2}$记B的表示:

$$\mu a^{1/2}\left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right) = \mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

以$\rho(\mu)$记G的诱导表示$\mathscr{I}(\mu_1, \mu_2)$。设$(\pi, V)$为$G$的任一光滑表示. 如果$L \in \mathrm{Hom}_B(\pi|_B, \mu a^{1/2})$, $v \in V$, 定义G上的函数$T(v)$如下:

$$T(v)g = L(\pi(g)v).$$

证明:

(1) $T(v) \in C_c^\infty(G)$;

(2) $L \to T$定义同构:

$$\mathrm{Hom}_B(\pi|_B, \mu a^{1/2}) \approx \mathrm{Hom}_G(\pi, \rho(\mu)).$$

(以上同构称为Frobenius reciprocity。)

7. 设(π, V)是$G = \mathrm{GL}(2, F)$的光滑表示. 对N的紧开子群M, 以V_M记由满足以下条件的向量v所生成的子空间:

$$\int_M \pi(m) v dm = 0, \quad v \in V.$$

(1) 证明定义3.1中的

$$V(N)=\bigcup_{M\subseteq N} V_M.$$

设L是V上的N不变线性形，$v\in V_M$。因为π是光滑的，所以存在紧开子群$M'\subset M$，使得v是M'不变的。如果$M=\bigcup_i m_i M'$，则

$$\int_M \pi(m)v\mathrm{d}m=\sum_i \mathrm{vol}(M')\pi(m_i)v.$$

(2) 证明：V的线性形L是N不变的充要条件是$L(V(N))=0$。

8. 用习题1的符号，并设

$$\bar{N}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}N\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad N_n=N\cap K_n,$$

$$A_n=A\cap K_n,\quad \bar{N}_n=\bar{N}\cap K_n.$$

已给G的表示(π,V)对G的紧子群M，以P_M记投射$V\to V^M$，以Δ记投射$V\to V_N$。证明

(1) $K_n=N_nA\bar{N}_n$。

(2) $P_{K_n}=P_{N_n}P_{A_n}P_{\bar{N}_n}$。

(3) $\Delta P_{N_n}=\Delta$，$\Delta P_{A_n}=P_{A_n}\Delta$。

(4) 如果$a=\begin{pmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{pmatrix}$，$|a_1a_2^{-1}|\leqslant 1$，则$a^{-1}\bar{N}_na\subset\bar{N}_n$。而且

$$P_{\bar{N}_n}\pi(a)v=\int_{\bar{N}_n}\pi(x)\pi(a)v\mathrm{d}x\quad\left(\int_{\bar{N}_n}\mathrm{d}x=1\right)$$

$$=\pi(a)v.$$

(5) $\Delta V^{K_n}=V_N^{A_n}$。以$J(\pi)$记A在Jacquet模V_N上的表示。证明：如果(π,V)是可容许G模，则$(J(\pi),V_N)$是可容许A模。

第三章　Hecke代数和GL(2, A)的表示

本章的内容是在前面两章的基础之上，进一步讨论一个数域的 Adele 环上的二阶矩阵群的无限维表示理论. 在本章中，我们使用群代数的工具，引进 Hecke 代数这一重要概念，并研究它的一些基本性质.

§1　群　代　数

设 V 是一个向量空间，其基域为实数域 R 或复数域 C. 如果存在 V 到 R 的一个映射：$\forall v \in V$，$v \mapsto \|v\| \in R$，它满足如下条件：

(1)　$\|v\| \geqslant 0$，且 $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$；

(2)　$\|av\| = |a| \|v\|$；

(3)　$\|v_1 + v_2\| \leqslant \|v_1\| + \|v_2\|$

(其中 a 属于 V 的基域). 则 V 称为赋范空间. $\|\cdot\|$ 称为 V 的范数.

设 V 是一个赋范空间，定义 V 内两个向量 v_1, v_2 的距离如下：

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|,$$

容易验证，此时 V 成为一个度量空间. 如果 V 关于上述距离是一个完备的度量空间（即任意一个满足 Cauchy 收敛条件的序列在 V 内都有极限），则称为一个Banach 空间.

如果在一个Banach 空间 V 内的向量之间定义了乘法运算，使它成为线性结合代数，而且其范数满足关系式 $\|v_1 v_2\| \leqslant \|v_1\| \cdot \|v_2\|$ ($\forall v_1, v_2 \in V$)，则称 V 是一个 Banach 代数.

一个复数域上的Banach代数 V 到自身的映射：$v \mapsto v^*$ 如果满足

以下条件：

(1) $(av_1+bv_2)^*=\bar{a}v_1^*+\bar{b}v_2^*$；

(2) $(v_1v_2)^*=v_2^*v_1^*$；

(3) $(v^*)^*=v$

（其中$a,b\in C$，$\bar{a},\bar{b}$为复数共轭），则此映射称为V内的一个对合。如果V内存在一个对合，它还满足以下附加条件：

$$\|v^*v\|=\|v\|^2 \quad (\forall v\in V),$$

则V称为一个C^*-代数。

现在设G是一个局部紧拓扑群，取定G的一个左不变Haar积分。令$L^1(G)$表示G上复值可积函数所组成的复向量空间。对$f\in L^1(G)$，定义

$$\|f\|=\int_G|f(x)|\mathrm{d}x.$$

我们有：

(1) $\|f\|\geqslant 0$，且$\|f\|=0\Longleftrightarrow f=0$；

(2) $\|af\|=|a|\cdot\|f\|$，$a\in C$；

(3) $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$。

这些都是Haar积分的简单性质，其证明此处从略。由此，$L^1(G)$对范数$\|\cdot\|$成为一个复Banach空间。

定义$L^1(G)$内两个元素f,g的卷积如下：

$$f*g(x)=\int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}y.$$

如作变换：$y\mapsto xy$，则有

$$f*g(x)=\int_G f(xy)g(y^{-1})\mathrm{d}y.$$

卷积有如下性质：

$$\|f*g\|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|.$$

这可证明如下：

$$\|f*g\|=\int_G\left|\int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_G \int_G |f(y)g(y^{-1}x)| \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_G |f(y)| \left\{ \int_G |g(y^{-1}x)| \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y$$

$$= \int_G |f(y)| \left\{ \int_G |g(x)| \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y$$

$$= \|f\| \cdot \|g\|,$$

其中利用了Haar积分的Fubini定理及左不变性。

根据上面的阐述，我们知道$L^1(G)$关于乘法$f*g$成为 Banach 代数。称它是G的群代数。

取定$s\in G$，定义

$$\mu(f) = \int_G f(xs^{-1})\mathrm{d}x.$$

则对任意$t\in G$，有

$$\mu(f(t^{-1}x)) = \int_G f((t^{-1}x)s^{-1})\mathrm{d}x$$

$$= \int_G f(t^{-1}(xs^{-1}))\mathrm{d}x = \int_G f(xs^{-1})\mathrm{d}x = \mu(f)$$

故$\mu(f)$是G上的左不变Haar积分。于是存在正实数$\Delta(s)$，使

$$\int_G f(xs^{-1})\mathrm{d}x = \Delta(s)\int_G f(x)\mathrm{d}x,$$

$\Delta(s)$称为G的左模函数。我们有

$$\Delta(st) = \Delta(s)\Delta(t),$$

$$\int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\mathrm{d}x = \int_G f(x)\mathrm{d}x.$$

对$f\in L^1(G)$，我们定义 $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$ ($\bar{f}$ 表示复共轭)，则$f^*\in L^1(G)$。$*$运算有下列性质：

(1) $(f^*)^* = f$；

(2) $(f+g)^* = f^* + g^*$；

(3) $(af)^*=\bar{a}f^*$, $a\in \mathbf{C}$;

(4) $(f*g)^*=g^**f^*$.

(1)—(3)都是显然的．我们证一下(4)：

$$(f*g)^*(x)=\overline{f*g}(x^{-1})\Delta(x^{-1})$$

$$=\int_G \bar{f}(y)\bar{g}(y^{-1}x^{-1})\Delta(x^{-1})\mathrm{d}y$$

$$=\int_G \bar{g}((xy)^{-1})\Delta((xy)^{-1})f(y)\Delta(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_G g^*(xy)f^*(y^{-1})\mathrm{d}y=g^**f^*.$$

这表明$*$是Banach 代数 $L^1(G)$的一个对合．我们今后称 $L^1(G)$关于这个对合为一个$*$-Banach代数．

设A是一个有向集(即A中有一个偏序"$\leqslant$"，而且对于a_1，$a_2\in A$，存在$a_3\in A$ 使$a_1\leqslant a_3$，$a_2\leqslant a_3$)，$f: A\to \mathbf{C}$．如果对$\forall\varepsilon>0$，存在 $a_0\in A$，使当 $a\geqslant a_0$ 时有$|f(a)-a|<\varepsilon$(对某个$a\in \mathbf{C}$)，则我们写成$\lim\limits_a f(a)=a$．

现设A是一个有向指标集，集合$\{u_a\in L^1(G): a\in A\}$如果具有如下性质：$\forall f\in L^1(G)$，

$$\lim_a\|f*u_a-f\|=0,\quad \lim\|u_a*f-f\|=0,$$

则$\{u_a\}$称为$L^1(G)$的一个近似单位．

命题1.1 $L^1(G)$有近似单位．

证 设$\{N_a: a\in A\}$是G的单位元素e的一个紧邻域基，我们约定：若$N_{a_1}\subseteq N_{a_2}$，则$a_2\leqslant a_1$．这样，A是一个有向集．对每个$a\in A$，取非负连续函数u_a，使$\mathrm{supp}(u_a)\subseteq N_a$，且$\int_G u_a(x)\mathrm{d}x=1$．则对$f\in L^1(G)$，有

$$f(x)=\int_G f(x)u_a(y)\mathrm{d}y.$$

因而，我们有

$$\|u_\alpha * f - f\| = \int_G \left| \int_G u_\alpha(y) f(y^{-1}x) \mathrm{d}y - f(x) \right| \mathrm{d}x$$

$$= \int_G \left| \int_G u_\alpha(y) \{ f(y^{-1}x) - f(x) \} \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_G \int_G |u_\alpha(y)| \, |f(y^{-1}x) - f(x)| \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$= \int_G \|f_y - f\| u_\alpha(y) \mathrm{d}y$$

$$= \int_{N_\alpha} \|f_y - f\| u_\alpha(y) \mathrm{d}y,$$

其中 $f_y(x) = f(y^{-1}x)$。

现在来证明$G \to L^1(G)$的映射：$y \mapsto f_y$是连续映射。

任给$\varepsilon > 0$，存在$g \in C_c(G)$，使$\|f - g\| < \varepsilon$，这里g是一致连续函数。于是存在单位元素的邻域N，使当$y'y^{-1} \in N$时，$\|g_{y'} - g_y\| < \varepsilon$。此时，对$y'y^{-1} \in N$，有

$$\|f_{y'} - f_y\| \leqslant \|f_{y'} - g_{y'}\| + \|g_{y'} - g_y\| + \|g_y - f_y\|$$
$$= \|f - g\| + \|g_{y'} - g_y\| + \|f - g\| < 3\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{y \to e} \|f_y - f\| = 0$。取$\alpha_0 \in A$，使当$\alpha \geqslant \alpha_0$时，对 $y \in N_\alpha$，有$\|f_y - f\| < \varepsilon$。代入原式，我们有

$$\|u_\alpha * f - f\| < \varepsilon \int_{N_\alpha} u_\alpha(y) \mathrm{d}y = \varepsilon.$$

因为$\{N_\alpha^{-1}\}$也是G的单位元素的一个紧邻域基，而且 $\mathrm{supp}\, u_\alpha^* \subseteq N_\alpha^{-1}$，$u_\alpha^* \geqslant 0$，$\|u_\alpha^*\| = \|u_\alpha\| = 1$（注意对任意 $f \in L^1(G)$，$\|f^*\| = \|f\|$），所以应有 $\|u_\alpha^* * f - f\| \to 0$。而

$$\|f * u_\alpha - f\| = \|(f * u_\alpha - f)^*\| = \|u_\alpha^* * f^* - f^*\| \to 0.$$

综合以上推理，即知$\{u_\alpha\}$是$L^1(G)$的一个近似单位。▎

设H是一个Hilbert空间，$\mathscr{L}(H)$为 H上有界算子代数，从$*$-Banach代数$L^1(G)$到$\mathscr{L}(H)$的代数同态A，是$L^1(G)$到 $\mathscr{L}(H)$的映射，满足如下条件：

$$A(f+g)=A(f)+A(g), \quad A(af)=aA(f),$$
$$A(f*g)=A(f)A(g).$$
如果A还满足下面的补充条件
$$A(f^*)=A(f)^*$$
(其中$a\in C$, $A(f)^*$是$A(f)$的共轭算子)，则A称为$L^1(G)$的一个$*$-表示。

对$*$-表示A，定义
$$\mathfrak{N}(A)=\{v\in H:A(f)v=0, \quad \forall f\in L^1(G)\}.$$
若$\mathfrak{N}(A)=0$，则A称为非退化表示。

引理1.2 设$A:L^1(G)\to\mathscr{L}(H)$为非退化$*$-表示，令$H_1$为向量组$\{A(f)v:f\in L^1(G), v\in H\}$所生成的闭子空间，则$H_1=H$。

证 设$H_1^\perp=H_2$，因为
$$A(g)(A(f)v)=A(g*f)v,$$
所以$A(L^1(G))H_1\subseteq H_1$。对$\forall v_1\in H_1$, $v_2\in H_2$, $f\in L^1(G)$，有
$$\langle v_1,A(f)v_2\rangle=\langle A(f)^*v_1,v_2\rangle=\langle A(f^*)v_1,v_2\rangle=0,$$
由此知$A(L^1(G))H_2\subseteq H_2$。取$v\in H_2$，则$\forall f\in L^1(G)$，有
$$A(f)v\in H_1\cap H_2=\{0\}.$$
所以$v\in\mathfrak{N}(A)=\{0\}$。由此知$H_2=\{0\}$，即$H_1=H$。 ∎

在证明引理1.1时，我们曾定义映射$G\to L^1(G)$：
$$y\mapsto f_y(x)=f(y^{-1}x).$$
对此，我们有如下的

引理1.3 设$f,g\in L^1(G)$, $x\in G$，则
$$(g_x)^**f_x=g^**f.$$

证 我们有
$$(g_x)^**f_x(y)=\int_G g_x^*(z)f_x(z^{-1}y)\mathrm{d}z$$
$$=\int_G \bar{g}_x(z^{-1})f_x(z^{-1}y)\Delta(z^{-1})\mathrm{d}z$$

$$=\int_G \bar{g}_x(z)f_x(zy)\mathrm{d}z=\int_G \bar{g}(z)f(zy)\mathrm{d}z$$

$$=\int_G \bar{g}(z^{-1})f(z^{-1}y)\Delta(z^{-1})\mathrm{d}z$$

$$=\int_G g^*(z)f(z^{-1}y)\mathrm{d}z=g^* * f(y). \quad \blacksquare$$

引理1.4 设 $A:L^1(G)\to\mathscr{L}(H)$ 是 $*$-表示，$\sum_{i=1}^n A(f_i)v_i=0$。则 $\forall x\in G$，有

$$\sum_{i=1}^n A((f_i)_x)v_i=0.$$

证 我们有

$$0=\left\langle\sum_{i=1}^n A(f_i)v_i,\sum_{j=1}^n A(f_j)v_j\right\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\langle A(f_i)v_i,\ A(f_j)v_j\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\langle A^*(f_j)A(f_i)v_i,\ v_j\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\langle A(f_j^*)A(f_i)v_i,\ v_j\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\langle A(f_j^* * f_i)v_i,v_j\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\langle A(((f_j)_x)^* * ((f_i)_x)^*)v_i,v_j\rangle$$

$$=\left\langle\sum_{i=1}^n A((f_i)_x)v_i,\sum_{j=1}^n A((f_j)_x)v_j\right\rangle.$$

由此，立即得出

$$\sum_{i=1}^n A((f_i)_x)v_i=0. \quad \blacksquare$$

现在设G是一个局部紧拓扑群，在第一章已指出，$\hat{G}$是G的不可约酉表示的等价类所成的集合。再令$\widehat{L^1(G)}$为$L^1(G)$的非退化*-表示所组成的集合。对$\pi\in\hat{G}$（即π为G的一个不可约酉表示），设其表示空间为H（应是一个 Hilbert 空间）。对$x\in G$，$\pi(x)$是H内的一个酉算子。任取$f\in L^1(G)$，及$u\in H$，则存在唯一的$a_{f,u}\in H$，满足

$$\int_G f(x)\langle\pi(x)u,v\rangle\mathrm{d}x=\langle a_{f,u},v\rangle,\quad \forall v\in H.$$

固定f，则$u\mapsto a_{f,u}$是H上的一个线性算子，我们把它记作

$$A(f)=\int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}x.$$

显然，映射$f\mapsto A(f)$是$L^1(G)$到$\mathscr{L}(H)$内的一个线性映射（参看下面定理1.5证明中的(1)）。

定理1.5 从$\hat{G}$到$\widehat{L^1(G)}$之间存在一个单满映射σ。使当$\sigma(\pi)=A$时，有

$$A(f)=\int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}x,\quad \forall f\in L^1(G),$$

$$\pi(x)A(f)=A(f_x),\quad \forall x\in G,\ f\in L^1(G).$$

证 我们分四步来证明这个定理。

(1) 设给定$(\pi,H)\in\hat{G}$。取定$u,v\in H$，则$x\mapsto\langle\pi(x)u,v\rangle$是$G$到$\mathbf{C}$的连续映射。因为$\pi(x)$是酉算子，所以

$$|\langle\pi(x)u,v\rangle|\leqslant\|\pi(x)u\|\cdot\|v\|=\|u\|\cdot\|v\|.$$

此时，对$f\in L^1(G)$，有

$$\int_G f(x)\langle\pi(x)u,v\rangle\mathrm{d}x<\infty.$$

对固定的f，由于

$$\left|\int_G f(x)\langle\pi(x)u,v\rangle\mathrm{d}x\right|\leqslant\|f\|\cdot\|u\|\cdot\|v\|,$$

所以 $$(u,v)\mapsto\int_G f(x)\langle\pi(x)u,v\rangle \mathrm{d}x$$

是H上的有界双线性泛函。根据 Riesz 表示定理，存在算子$A(f)$，使$\|A(f)\|\leqslant\|f\|$，且$\forall u,v\in H$，有

$$\langle A(f)u,v\rangle=\int_G f(x)\langle\pi(x)u,v\rangle \mathrm{d}x.$$

显然，$f\mapsto A(f)$是一个线性映射。由$\|A(f)\|\leqslant\|f\|$推知，A是$L^1(G)$到$\mathscr{L}(H)$的连续映射。

我们有

(a) $$A(f*g)=\int_G f*g(x)\pi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_G\int_G f(y)g(y^{-1}x)\pi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_G f(y)\pi(y)\left\{\int_G g(y^{-1}x)\pi(y^{-1}x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y$$

$$=A(f)A(g).$$

(b) $$\langle A(f^*)u,v\rangle=\int_G f^*(x)\langle\pi(x)u,v\rangle \mathrm{d}x$$

$$=\int_G \bar{f}(x^{-1})\Delta(x^{-1})\langle\pi(x)u,v\rangle \mathrm{d}x$$

$$=\int_G \bar{f}(x^{-1})\langle u,\pi(x^{-1})v\rangle\Delta(x^{-1})\mathrm{d}x$$

$$=\int_G \bar{f}(x^{-1})\overline{\langle\pi(x^{-1})v,u\rangle}\Delta(x^{-1})\mathrm{d}x$$

$$=\int_G \bar{f}(x)\overline{\langle\pi(x)v,u\rangle}\mathrm{d}x$$

$$=\overline{\langle A(f)v,u\rangle}=\langle A(f)^*u,v\rangle,$$

即 $A(f^*)=A(f)^*$。

从上面的讨论可以知道，$f\mapsto A(f)$是$L^1(G)$的$*$-表示。

现设 $v\in\mathfrak{N}(A)$，则 $\forall f\in L^1(G)$，$A(f)v=0$。于是

$$0=\langle A(f)v,u\rangle=\int_G f(x)\langle\pi(x)v,u\rangle\mathrm{d}x.$$

上式表示 $\langle\pi(x)v,u\rangle$ 几乎处处等于0，从而 $\pi(x)v=0$。但 $\pi(x)$ 可逆 $(\pi(x)^{-1}=\pi(x^{-1}))$，故 $v=0$，即 $\mathfrak{N}(A)=\{0\}$。这说明 A 是非退化的。

上面，我们给出了映射 σ，对 $\pi\in\hat{G}$，$\sigma(\pi)=A$，其中

$$A(f)=\int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}x\in\widehat{L^1(G)}.$$

(2) 现设给定 $A\in\widehat{L^1(G)}$. 以 H_0 表示 $\{A(f)v: f\in L^1(G), v\in H\}$ 生成的子空间。根据引理1.4，对 $x\in G$，我们可以定义 H_0 上的一个线性算子 $\pi(x)$ 如下：

$$\pi(x)\left(\sum_{i=1}^{n}A(f_i)v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}A((f_i)_x)v_i.$$

我们又有

$$\begin{aligned}
&\left\langle\pi(x)\left(\sum_{i=1}^{n}A(f_i)v_i\right),\ \pi(x)\left(\sum_{j=1}^{m}A(g_j)u_j\right)\right\rangle\\
&=\left\langle\sum_{i=1}^{n}A((f_i)_x)v_i,\ \sum_{j=1}^{m}A((g_j)_x)u_j\right\rangle\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle A((g_j)_x^*\ast(f_i)_x)v_i,u_j\rangle\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle A(g_j^*\ast f_i)v_i,u_j\rangle\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle A(f_i)v_i,A(g_j)u_j\rangle\\
&=\left\langle\sum_{i=1}^{n}A(f_i)v_i,\sum_{j=1}^{m}A(g_j)u_j\right\rangle.
\end{aligned}$$

上式表明 $\pi(x)^*=\pi(x)^{-1}$，即 $\pi(x)$ 是 H 内的酉算子。我们可以

把 $\pi(x)$ 的定义域扩充到 $H_0=H$（参看引理1.2）上。因为 $f_{(xy)}=(f_y)_x$，由此推出 $\pi(xy)=\pi(x)\pi(y)$。从 $*$-Banach 代数的 $*$-表示理论知道 $\|A(f)\|\leqslant\|f\|$，又因 $x\mapsto f_x$ 是连续映射，故 π 是 G 的不可约酉表示。

这样我们建立了映射 $\tau:\widehat{L^1(G)}\to\hat{G}$，使 $A\mapsto\pi$。

(3) 设 $\pi\in\hat{G}$，$\sigma(\pi)=A$，$\tau(A)=\rho\in\hat{G}$。我们有

$$\begin{aligned}\pi(x)A(f)&=\pi(x)\int_G f(y)\pi(y)\mathrm{d}y\\&=\int_G f(y)\pi(xy)\mathrm{d}y\\&=\int_G f(x^{-1}y)\pi(y)\mathrm{d}y\\&=\int_G f_x(y)\pi(y)\mathrm{d}y\\&=A(f_x)=\rho(x)A(f).\end{aligned}$$

因为 $\{A(f)v:f\in L^1(G),\ v\in H\}$ 生成 H 的稠密子空间，故必有 $\pi(x)=\rho(x)$。这表明 $\tau\sigma=\mathrm{id}$。

(4) 设 $A\in\widehat{L^1(G)}$，$\tau(A)=\pi\in\hat{G}$，$\sigma(\pi)=B\in\widehat{L^1(G)}$。取定 u，$v\in H$，则 $f\mapsto\langle A(f)u,v\rangle$ 是 $L^1(G)$ 上的有界线性泛函，所以存在函数 $\theta\in L^\infty(G)$，使

$$\langle A(f)u,v\rangle=\int_G f(y)\theta(y)\mathrm{d}y.$$

于是，$\forall f,g\in L^1(G)$，我们有

$$\begin{aligned}&\langle B(f)A(g)u,v\rangle\\&\quad=\int_G f(x)\langle\pi(x)A(g)u,v\rangle\mathrm{d}x\\&\quad=\int_G f(x)\langle A(g_x)u,v\rangle\mathrm{d}x\\&\quad=\int_G\int_G f(x)g_x(y)\theta(y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int_G f * g(y)\theta(y)\mathrm{d}y = \langle A(f*g)u, v\rangle$$

$$= \langle A(f)A(g)u, v\rangle.$$

由于 u , v 的任意性，上式表明 $B(f)A(g) = A(f)A(g)$。我们已知 $\{A(g)v\}$ 生成H的稠密子空间，故 $B(f) = A(f)$。这就说明，$\sigma\tau = \mathrm{id}$。

综合上面的讨论，我们得知 σ 是一个单满映射。 ▎

§2 Hecke 代数($\nu|\infty$)

在这一节中，我们来讨论实数域 $\boldsymbol{R}$(为数域对其实阿基米德赋值的完备化域）上二阶矩阵群 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$上的 Hecke 代数以及它的表示和第一章所阐述的$(\mathfrak{g},K)$模之间的关系。

令

$$\mathscr{H}_1 = \{f \in C_c^\infty(\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})) : f \text{ 是左和右 } K \text{ 有限}\},$$

就是说，$\mathscr{H}_1$ 是 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$ 上无限次可微，具有紧支集且对 $K = O(2,\boldsymbol{R})$ 左、右有限的函数 f 所组成的向量空间。在群 $G_{\boldsymbol{R}} = \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$上取定一个 Haar 测度，任取 $f \in \mathscr{H}_1$，我们可以用

$$\mu(\phi) = \int_G \phi(x)f(x)\mathrm{d}x$$

来定义一个新的 Haar 积分，所以 $\mathscr{H}_1$ 的元素可以看作 $G_{\boldsymbol{R}}$ 上的测度。

$\mathscr{H}_1$中元素的卷积定义为

$$f_1 * f_2(g) = \int_{G_{\boldsymbol{R}}} f_1(k)f_2(k^{-1}g)\mathrm{d}k,$$

$\mathscr{H}_1$关于上述卷积成为一个线性结合代数。

在 $K = O(2,\boldsymbol{R})$上取定一个测度 ν，使 $\nu(K) = 1$。把K的不可约表示的矩阵元素的有限复系数线性组合看成K上的测度，它可以自然地扩充成 $G_{\boldsymbol{R}}$ 上的测度(认为其支集包含在K内)，这些测

度的全体组成一个复向量空间，关于卷积它也成为线性结合代数，我们把它记作$\mathscr{H}_2$。

定义2.1 设$\mathscr{H}_R=\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2$，称$\mathscr{H}_R$为$GL(2,\boldsymbol{R})$的Hecke代数。其乘法是卷积，即对$f\in\mathscr{H}_1,\xi\in\mathscr{H}_2$，令

$$\xi*f(g)=\int_K\xi(u)f(u^{-1}g)\mathrm{d}u,$$

$$f*\xi(g)=\int_K f(gu)\xi(u^{-1})\mathrm{d}u.$$

设$\sigma_i(1\leqslant i\leqslant p)$是$O(2,\boldsymbol{R})$的一组互不等价的不可约酉表示，令

$$\xi_i(u)=(\dim\sigma_i)\mathrm{Tr}\,\sigma_i(u^{-1}),\quad u\in O(2,\boldsymbol{R}),$$

$$\xi=\sum_{i=1}^{p}\xi_i.$$

我们有

$$\xi_i*\xi_j(u)=(\dim\sigma_i)(\dim\sigma_j)\times\int_K\mathrm{Tr}\,\sigma_i(v^{-1})\mathrm{Tr}\,\sigma_j(u^{-1}v)\mathrm{d}v$$

因为σ_i,σ_j为酉表示，故

$$\sigma_i(v^{-1})=\sigma_i(v)^{-1}=(\sigma_i(v))^*,$$

从而$\mathrm{Tr}\,\sigma_i(v^{-1})=\overline{\mathrm{Tr}\sigma_i(v)}$，$\sigma_j(u^{-1}v)=\sigma_j(u^{-1})\sigma_j(v)$。利用紧群$O(2,\boldsymbol{R})$不可约酉表示矩阵元素的正交性(参看第一章§1的命题1.4)，我们有

$$\xi_i*\xi_j=0\quad(i\neq j),$$

$$\begin{aligned}\xi_i*\xi_i&=(\dim\sigma_i)^2\int_K[\overline{\mathrm{Tr}\,\sigma_i(v)}\\&\qquad\times\mathrm{Tr}\,\sigma_i(u^{-1})\sigma_i(v)]\mathrm{d}v\\&=(\dim\sigma_i)^2\sum_{s,k=1}^{\dim\sigma_i}(\sigma_i(u^{-1}))_{sk}\\&\qquad\times\int_K\overline{\mathrm{Tr}(\sigma_i(v))}\cdot(\sigma_i(v))_{ks}\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$= (\dim \sigma_i) \sum_{k=1}^{\dim \sigma_i} (\sigma_i(u^{-1}))_{kk}$$

$$= (\dim \sigma_i) \mathrm{Tr}\, \sigma_i(u^{-1}) = \xi_i.$$

由此立得

$$\xi * \xi = \xi,$$

从而ξ是一个幂等元素，我们称ξ为$\mathscr{H}_R$的初等幂等元素。

定义2.2 称$\mathscr{H}_R$的表示(π, V)为**可容许的**，如果下列条件成立：

(1) $\forall v \in V$，$\exists f_i \in \mathscr{H}_1$，$v_i \in V$，使

$$v = \sum_{i=1}^{s} \pi(f_i) v_i;$$

(2) 对所有初等幂等元素ξ，$\dim \pi(\xi)V < \infty$；

(3) 对所有初等幂等元素ξ，及任意$v \in \pi(\xi)V$，映射

$$f \mapsto \pi(f)v, \quad f \in \xi \mathscr{H}_1 \xi$$

是连续的；

(4) $V = \bigcup_{\xi} \pi(\xi \mathscr{H}_1 \xi)V$，其中$\xi$取遍所有初等幂等元素。

设$\mathfrak{g}$为群$\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})$的李代数，$(\pi, V)$是一个$(\mathfrak{g}, K)$模，那么，对$\forall f \in \mathscr{H}_i (i = 1, 2)$，我们可以定义

$$\pi(f) = \int_{G_R} f(x) \pi(x) \mathrm{d}x.$$

因为，$\mathscr{H}_1 \subseteq C_c^\infty(G_R)$，$\mathscr{H}_2$的元素的支集包含在$K$内。所以对$f \in \mathscr{H}_i (i = 1, 2)$，上面的积分都有定义。

引理2.1 符号如上。我们有：

(1) π是$\mathscr{H}_R$的表示；

(2) 若(π, V)是不可约$(\mathfrak{g}, K)$模，则π是$\mathscr{H}_R$的不可约表示；

(3) 若(π, V)是可容许$(\mathfrak{g}, K)$模，则π是$\mathscr{H}_R$的可容许表

示。

这个引理的证明此处从略。 ∎

§3 Hecke 代数($\nu<\infty$)

本节讨论局部域F上二阶全矩阵群GL(2,F)的Hecke 代数。令$G=\mathrm{GL}(2,F)$，其中F是p-adic 数域$\mathbf{Q}_p$的有限次扩域：$[F:\mathbf{Q}_p]<\infty$。

定义3.1 设K是G的一个紧开子群，以$\mathscr{H}(G,K)$记由以下函数生成的复向量空间：

$$f:G\to\mathbf{C}.$$

(1) $\forall g\in G$, $k,k'\in K$, $f(kgk')=f(g)$

(2) 存在有限个$g_i\in G$，使$\operatorname{supp} f\subseteq\bigcup_i Kg_iK$。

在G上选定一个Haar 测度μ，定义$\mathscr{H}(G,K)$内两个函数的乘法为其卷积：

$$f_1*f_2(g)=\int_G f_1(x)f_2(x^{-1}g)\mathrm{d}x$$

则$\mathscr{H}(G,K)$成为一个线性结合代数。在这里，我们仅需验证$f_1*f_2\in\mathscr{H}(G,K)$就可以了。

(1) $\forall g\in G,k,k'\in K$，我们有

$$f_1*f_2(kgk')=\int_G f_1(x)f_2(x^{-1}kgk')\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=kx_1}\int_G f_1(kx_1)f_2(x_1^{-1}gk')\mathrm{d}x_1$$

$$=\int_G f_1(x_1)f_2(x_1^{-1}g)\mathrm{d}x_1=f_1*f_2(g).$$

(2) 设$\operatorname{supp} f_1\subseteq\bigcup_{i=1}^n Kg_iK$，$\operatorname{supp} f_2\subseteq\bigcup_{j=1}^m Kh_jK$。我们有

$$f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(x) f_2(x^{-1}g)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_1(g_i) \int_{Kg_iK} f_2(x^{-1}g)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_1(g_i) f_2(h_j) \int_{Kg_iK \cap gKh_j^{-1}K} \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_1(g_i) f_2(h_j) \mathrm{vol}(Kg_iK \cap gKh_j^{-1}K).$$

如果 $Kg_iK \cap gKh_j^{-1}K \neq \varnothing$，则 $g \in Kg_iKh_jK$。任取 $k \in K$，设

$$g_ikh_j \in KlK \quad (l \in G),$$

则

$$k \in g_i^{-1}KlKh_j^{-1} \cap K,$$

而 $g_i^{-1}KlKh_j^{-1} \cap K$ 为 K 的非空开子集。因为 K 是紧的，所以存在有限个 $l_{ij}^t (t = 1, \cdots, s)$，使 $K \subseteq \bigcup_{t=1}^{s} g_i^{-1}Kl_{ij}^tKh_j^{-1}$，即有

$$Kg_iKh_jK \subseteq \bigcup_{t=1}^{s} Kl_{ij}^tK.$$

注意到 Kl_{ij}^tK 都是 G 的闭集，故应有

$$\mathrm{supp} f_1 * f_2 \subseteq \bigcup_{i,j,t} Kl_{ij}^tK.$$

取 $\{g_a | a \in A\}$ 是二重陪集系 $K\backslash G/K$ 的代表元 集合。对每个 $a \in A$，定义 G 上函数

$$u_a(g) = \begin{cases} \mu(K)^{-1}, & \text{若 } g \in Kg_aK, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

假设当 $a = a_0$ 时，g_{a_0} 为 G 的单位元素，并将 u_{a_0} 记作 e_K.显然，我们有

$$e_K(g) = \begin{cases} \mu(K)^{-1}, & \text{若 } g \in K, \\ 0, & \text{若 } g \notin K. \end{cases}$$

引理3.1 符号如上。我们有

(1) $\{u_\alpha\}$是线性空间$\mathscr{H}(G,K)$的一组基；

(2) e_K是$\mathscr{H}(G,K)$的单位元素；

(3) $u_\alpha * u_\beta = \sum_\gamma C_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma$，且对适当选定的 $x_i, y_j \in K(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$，有

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \#\{(i,j): g_\gamma^{-1} x_i g_\alpha y_j g_\beta \in K\}.$$

证 (1) $\{u_\alpha\}$显然线性无关。对任意$f \in \mathscr{H}(G,K)$，假设$\operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K g_{\alpha_i} K$，则显然有

$$f = \mu(K) \sum_{i=1}^{n} f(g_{\alpha_i}) u_{\alpha_i},$$

故$\{u_\alpha\}$组成$\mathscr{H}(G,K)$的一组基。

(2) 我们有

$$e_K * u_\alpha(g) = \int_G e_K(x) u_\alpha(x^{-1}g)\,dx$$

$$= \mu(K)^{-1} \int_K u_\alpha(x^{-1}g)\,dx$$

$$= \mu(K)^{-1} u_\alpha(g) \int_K dx = u_\alpha(g).$$

$$u_\alpha * e_K(g) = \int_G u_\alpha(x) e_K(x^{-1}g)\,dx$$

$$= \mu(K)^{-1} \int_{gK} u_\alpha(x)\,dx$$

$$= \mu(K)^{-1} u_\alpha(g) \int_{gK} dx = u_\alpha(g).$$

故 e_K是$\mathscr{H}(G,K)$的单位元素。

(3) 我们有

$$u_\alpha * u_\beta(g) = \int_G u_\alpha(x) u_\beta(x^{-1}g)\,dx$$

$$= \mu(K)^{-1} \int_{Kg_\alpha K} u_\beta(x^{-1}g)\mathrm{d}x$$

$$= \mu(K)^{-2} \int_{Kg_\alpha K \cap gKg_\beta^{-1}K} \mathrm{d}x$$

$$= \mu(K)^{-2}\mathrm{vol}(Kg_\alpha K \cap gKg_\beta^{-1}K).$$

已知$u_\alpha * u_\beta \in \mathscr{H}(G,K)$，按定义3.1的(1)，不妨设$g \in Kg_\gamma K(\gamma \in A)$。

设$K_\alpha = K \cap g_\alpha K g_\alpha^{-1}$，则$K_\alpha$是$K$的开子群，$[K:K_\alpha]<\infty$。选取$x_1,\cdots,x_m$，使$K$有左陪集分解式$K = \bigcup_{i=1}^{m} x_i K_\alpha$。此时

$$Kg_\alpha K = \bigcup_{i=1}^{m} x_i g_\alpha K,\ 且 x_i g_\alpha K \cap x_j g_\alpha K = \varnothing\ \ (i \neq j).$$

同理，可选取$y_1,\cdots,y_n$，使

$$Kg_\beta K = \bigcup_{j=1}^{n} y_j g_\beta K,\ 且 y_j g_\beta K \cap y_j g_\beta K = \varnothing\ \ (i \neq j).$$

定义集合

$$B = \{(i,j): g_\gamma^{-1} x_i g_\alpha y_j g_\beta \in K\}.$$

由于$y_j g_\beta (j=1,\cdots,n)$属于$K$的不同左陪集，故$B$中每个元素$(i,j)$由$i$唯一确定。再定义左陪集空间$G/K$的子集如下：

$$D = \{xK: x \in Kg_\alpha K \cap g_\gamma K g_\beta^{-1} K\}.$$

我们来定义D到B的一个映射ϕ。因为

$$Kg_\alpha K \cap g_\gamma K g_\beta^{-1} K = \left(\bigcup_{i=1}^{m} x_i g_\alpha K\right) \bigcap \left(g_\gamma \bigcup_{j=1}^{n} K g_\beta^{-1} y_j^{-1}\right),$$

我们设集合$x_i g_\alpha K \cap g_\gamma K g_\beta^{-1} y_l^{-1}$非空，则有$k \in K$，使

$$x_i g_\alpha k \in g_\gamma K g_\beta^{-1} y_l^{-1} \subseteq g_\gamma K g_\beta^{-1} K,$$

即
$$x_i g_\alpha \in g_\gamma K g_\beta^{-1} K = \bigcup_{j=1}^{n} g_\gamma K g_\beta^{-1} y_j^{-1}.$$

故存在j，使

$$x_i g_\alpha \in g_\gamma K g_\beta^{-1} y_j^{-1} \cap x_i g_\alpha K \subseteq K g_\alpha K \cap g_\gamma K g_\beta^{-1} K,$$

此时我们有 $g_\gamma^{-1} x_i g_\alpha y_j g_\beta \in K$，即$(i,j)\in B$。于是我们定义

$$\phi(x_i g_\alpha K) = (i,j).$$

因为对任意 $xK\in D$, $x\in(\bigcup x_i g_\alpha K)\cap(g_\gamma \bigcup K g_\beta^{-1} y_j^{-1})$，我们必有 $x\in x_i g_\alpha K\cap g_\gamma K g_\beta^{-1} y_l^{-1}$（对某个 i 及 l），此时 $xK = x_i g_\alpha K$。故 ϕ 是D到B的一个映射。由于集合B的元素(i,j)由 i 唯一决定，故ϕ是一个单射。任取$(i,j)\in B$，则$g_\gamma^{-1} x_i g_\alpha y_j g_\beta = k\in K$，则

$$\begin{aligned} x_i g_\alpha &= g_\gamma k g_\beta^{-1} y_j^{-1} \in g_\gamma K g_\beta^{-1} y_j^{-1} \cap x_i g_\alpha K \\ &\subseteq K g_\alpha K \cap g_\gamma K g_\beta^{-1} K, \end{aligned}$$

因而$x_i g_\alpha K\in D$，且$\phi(x_i g_\alpha K) = (i,j)$。故$\phi$是一个满射。

综合上面的讨论知 ϕ 是D到B的一一对应。因为集合 $K g_\alpha K \cap g_\gamma K g_\beta^{-1} K$恰为$D$中各左陪集之并，而$\mathrm{vol}(xK) = \mu(K)$，故

$$\mathrm{vol}(K g_\alpha K \cap g_\gamma K g_\beta^{-1} K) = \mu(K)\mathrm{Card}B,$$

代回原式，即得

$$u_\alpha * u_\beta = \sum_\gamma C_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma.$$

定义3.2 设$\mathscr{H}(G)$是G上局部常值且有紧支集的函数所组成的复向量空间，在其中定义乘法为函数的卷积：

$$f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(x) f_2(x^{-1}g)\mathrm{d}x.$$

则$\mathscr{H}(G)$是一个线性结合代数，称为G的 Hecke 代数。

引理3.2 符号如上。我们有

(1) $\mathscr{H}(G) = \bigcup\limits_K \mathscr{H}(G,K)$，其中$K$取遍$G$的所有紧开子群；

(2) $\mathscr{H}(G,K) = e_K \mathscr{H}(G) e_K$。

证 我们仅证明(2)。因为对$f\in\mathscr{H}(G)$，有

$$e_K * f(g) = \mu(K)^{-1}\int_K f(x^{-1}g)\mathrm{d}x,$$

$$f * e_K(g) = \int_G f(x) e_K(x^{-1}g) \mathrm{d}x = \mu(K)^{-1} \int_K f(gx) \mathrm{d}x,$$

所以

$$e_K * f * e_K(g) = \mu(K)^{-1} \int_K f * e_K(x^{-1}g) \mathrm{d}x$$

$$= \mu(K)^{-2} \int_K \int_K f(x^{-1}gy) \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

根据积分的不变性，对 $k, k' \in K$，有

$$e_K * f * e_K(kgk') = \mu(K)^{-2} \int_K \int_K f(x^{-1}kgk'y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$= \mu(K)^{-2} \int_K \int_K f((k^{-1}x)^{-1} g (k'y)) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$= \mu(K)^{-2} \int_K \int_K f(x^{-1}gy) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$= e_K * f * e_K(g).$$

设 $S = \mathrm{supp} f$。则对任意 $u \in S$，$KuK \cap S$ 是 S 关于诱导拓扑的开集，S 是紧的，故存在有限个 $u_1, \cdots, u_n \in S$，使

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Ku_iK.$$

当 $g \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{n} Ku_iK$ 时，$\forall x, y \in K$，$x^{-1}gy \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{n} Ku_iK$，从而 $x^{-1}gy \overline{\in} S$，即 $f(x^{-1}gy) = 0$。这表明，当 $g \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{n} Ku_iK$ 时，

$$e_K * f * e_K(g) = 0.$$

从而

$$\mathrm{supp}(e_K * f * e_K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Ku_iK,$$

从这里就得出 $e_K * f * e_K \in \mathscr{H}(G, K)$。 ▌

下面我们来讨论 G 的可容许表示和它的 Hecke 代数的表示之间的关系.

设 (π, V) 是群 G 的光滑表示，对 V 的对偶空间 V^* 内任一元

素v^*及任一固定的 v，定义

$$\pi_{v,v^*}(g)=v^*(\pi(g)v)=\langle v^*,\pi(g)v\rangle.$$

因为$G_v=\{g\in G:\pi(g)v=v\}$是G的开子群，故对于任意$g_0\in G$，g_0G_v是g_0的一个开邻域。$\forall g\in g_0G_v$，有 $g=g_0h(h\in G_v)$，故

$$\begin{aligned}\pi_{v,v^*}(g)&=\langle v^*,\pi(g)v\rangle=\langle v^*,\pi(g_0)\pi(h)v\rangle\\&=\langle v^*,\pi(g_0)v\rangle=\pi_{v,v^*}(g_0),\end{aligned}$$

即$\pi_{v,v^*}(g)$是G上的局部常值函数。我们称它为(π,V)的矩阵系数。

对$f\in\mathscr{H}(G)$，我们定义V上的线性算子如下：

$$\pi(f)=\int_G f(g)\pi(g)\mathrm{d}g.$$

那么，我们有如下的

引理3.3 符号如上。我们有

(1) 对$f\in\mathscr{H}(G)$，$v\in V$，存在$v_i\in V$，$c_i\in\mathbf{C}(i=1,\cdots,n)$，使

$$\pi(f)v=\sum_{i=1}^{n}c_iv_i;$$

(2) 对 $v^*\in V^*$，有

$$\langle v^*,\pi(f)v\rangle=\int_G f(g)\pi_{v,v^*}(g)\mathrm{d}g;$$

(3) 对$g\in G$，$f\in\mathscr{H}(G)$，令$\lambda(g)f(h)=f(g^{-1}h)(\forall h\in G)$。则

$$\pi(\lambda(g)f)=\pi(g)\pi(f).$$

证 (1) 设$\mathrm{supp}f=S$。对任意$u\in S$，存在u的开邻域U，使$f|_U$是一个常数。因为S是紧的，故存在G的开子集$U_1,\cdots,U_s$，使$f|_{U_i}=d_i$是常数，且$S\subseteq\bigcup_{i=1}^{s}U_i$。显然此时应有$S=\bigcup_{i=1}^{s}U_i$。$\bar{U}_i\subseteq S$，故$\bar{U}_i$是紧的。对$v\in V$，存在$G$的紧开子群$K$，使$v\in V^K=\{v\in V:\pi(K)v=v\}$。任取$u\in\bar{U}_i$，则$uK\cap\bar{U}_i$是$\bar{U}_i$的开子集，而$\bar{U}_i$是紧的，故存在有限多个$u_{ij}\in\bar{U}_i(j=1,\cdots,m_i)$，使

$$U_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{m_i} u_{ij}K.$$

对任意 $u \in U_i$，设 $u = u_{ij}k(k \in K)$，则

$$\pi(u)v = \pi(u_{ij})v.$$

于是，我们有(不妨设$i \neq j$时$d_i \neq d_j$，从而$U_i \cap U_j = \varnothing$)：

$$\pi(f)v = \int_G f(g)\pi(g)v\mathrm{d}g = \sum_{i=1}^{s} d_i \int_{U_i} \pi(g)v\mathrm{d}g$$

$$= \sum_{i=1}^{s} d_i \sum_{j=1}^{m_i} (\pi(u_{ij})v) \int_{U_i \cap u_{ij}K} \mathrm{d}g = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i.$$

(2) 可由定义推出。

(3) 对任意 $v^* \in V^*$，$v \in V$，我们有

$$\langle v^*, \pi(\lambda(g)f)v \rangle = \int_G f(g^{-1}h)\langle v^*, \pi(h)v \rangle \mathrm{d}h$$

$$= \int_G f(g^{-1}h)\langle v^*, \pi(g)\pi(g^{-1}h)v \rangle \mathrm{d}h$$

$$= \int_G f(g^{-1}h)\langle \pi(g)^* v^*, \pi(g^{-1}h)v \rangle \mathrm{d}h$$

$$= \langle \pi(g)^* v^*, \pi(f)v \rangle$$

$$= \langle v^*, \pi(g)\pi(f)v \rangle.$$

从上式立即推出$\pi(\lambda(g)f) = \pi(g)\pi(f)$。 |

现设$\sigma_i(i = 1, \cdots, n)$是$K = \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_F)$的一组互不等价的不可约酉表示．令

$$\xi_i(k) = (\dim\sigma_i)\mathrm{Tr}\sigma_i(k^{-1}), \quad k \in K,$$

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

那么，与§2类似，我们可以证明$\xi * \xi = \xi$，即ξ是一个幂等元素．如果让$\xi|_{G-K} = 0$，则ξ的定义域扩充为G，此时ξ成为$\mathscr{H}(G)$的一个幂等元素，我们称它为初等幂等元素(因为 $\mathrm{Ker}\,\sigma_i$ 为K的开子

群，故每个$\xi_i \in \mathscr{H}(G)$)。

定义3.3 称$\mathscr{H}(G)$的表示(π, V)为**可容许的**，如果

(1) $\forall v \in V$，存在$f \in \mathscr{H}(G)$，使$\pi(f)v = v$，

(2) 对所有初等幂等元素ξ，$\dim \pi(\xi) V < \infty$。

命题3.4 群G的可容许表示和$\mathscr{H}(G)$的可容许表示之间存在一一对应。

证 (1) 设给定G的可容许表示(π, V)。对$f \in \mathscr{H}(G)$，我们定义

$$\pi(f) = \int_G f(g) \pi(g) \mathrm{d}g.$$

取定$v \in V$，因(π, V)是光滑表示，故存在G的紧开子群C，使$v \in V^C$，$0 \neq \mu(C) < \infty$。令

$$\chi_C(g) = \begin{cases} 1, & 若 g \in C, \\ 0, & 若 g \overline{\in} C. \end{cases}$$

取$f = \mu(C)^{-1} \chi_C$，则

$$\pi(f)v = \int_G f(g) \pi(g) v \mathrm{d}g = \mu(C)^{-1} \int_C \pi(g) v \mathrm{d}g = v.$$

设ξ是一个初等幂等元素，由引理3.2的(1)我们设对紧开子群C，$\xi \in \mathscr{H}(G, C)$，于是

$$\xi(cg) = \xi(g), \quad \forall c \in C.$$

那么，$\forall c \in C$，$g \in G$，我们有$\lambda(c)\xi(g) = \xi(c^{-1}g) = \xi(g)$，故

$$\pi(\xi) = \pi(\lambda(c)\xi) = \pi(c)\pi(\xi).$$

上式表明$\pi(\xi) V \subseteq V^C$，但$\dim V^C < \infty$，故$\dim \pi(\xi) V < \infty$，于是$\pi(f)$为$\mathscr{H}(G)$的可容许表示。

(2) 现设给定$\mathscr{H}(G)$的可容许表示(π, V)。根据$\mathscr{H}(G)$可容许表示的条件(1)，可知对任意$v \in V$，都有

$$v = \sum_{i=1}^{n} \pi(f_i) v_i \quad (f_i \in \mathscr{H}(G), v_i \in V).$$

如果$\sum_{i=1}^{n} \pi(f_i) v_i = 0$，我们来证明：$\forall g \in G$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(\lambda(g)f_i)v_i=0.$$

为此，设 $w=\sum_{i=1}\pi(\lambda(g)f_i)v_i$，按定义3.3中的(1)，可找到 $f\in\mathscr{K}(G)$，使 $\pi(f)w=w$，故

$$w=\sum_{i=1}^{n}\pi(f*\lambda(g)f_i)v_i.$$

考察 G 在 $\mathscr{K}(G)$ 上的右平移作 用：$\rho(g)f(h)=f(hg)$，则

$$\begin{aligned}f*\lambda(g)f_i&=\int_G f(x)f_i(g^{-1}x^{-1}h)\mathrm{d}x\\&=\int_G f(x)f_i((xg)^{-1}h)\mathrm{d}x\\&=\Delta(g^{-1})\int_G f(xg^{-1})f_i(x^{-1}h)\mathrm{d}x\\&=\Delta(g^{-1})(\rho(g^{-1})f)*f_i\end{aligned}$$

(其中 $\Delta(g)$ 为 G 的左模函数)。故

$$\begin{aligned}w&=\Delta(g^{-1})\sum_{i=1}^{n}\pi(\rho(g^{-1})f)\pi(f_i)v_i\\&=\Delta(g^{-1})\pi(\rho(g^{-1})f)\ \sum_{i=1}^{n}\pi(f_i)v_i=0.\end{aligned}$$

根据上面的讨论，我们可以定义 $\pi(g)$ 如下：

$$\pi(g)\left(\sum_{i=1}^{n}\pi(f_i)v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\pi(\lambda(g)f_i)v_i.$$

那么，$\forall f\in\mathscr{K}(G)$，$g\in G$，$v\in V$，有

$$\pi(g)\pi(f)v=\pi(\lambda(g)f)v,$$

于是

$$\begin{aligned}\pi(g_1g_2)\pi(f)v&=\pi(\lambda(g_1g_2)f)v\\&=\pi(\lambda(g_1)\lambda(g_2)f)v=\pi(g_1)\pi(\lambda(g_2)f)v\\&=\pi(g_1)\pi(g_2)\pi(f)v,\end{aligned}$$

故$\pi(g_1g_2)=\pi(g_1)\pi(g_2)$。从而$\pi(g)$是群$G$的一个表示。

可以证明，上面定义的$\pi(g)$是G的可容许表示。

(3) 根据(1)，G的每个可容许表示(π,V)对应于$\mathscr{H}(G)$的一个可容许表示

$$\pi(f)=\int_G f(g)\pi(g)\mathrm{d}g.$$

这个对应记为σ。根据(2)，$\mathscr{H}(G)$的每个可容许表示(π,V)对应于G的一个可容许表示

$$\pi(g)\pi(f)v=\pi(\lambda(g)f)v.$$

这个对应记为τ。由于$\pi(f)v(v\in V)$生成V，故由引理3.3的(3)立即推出$\tau\sigma=\mathrm{id}$。

反之，设$\mathscr{H}(G)$的可容许表示$\pi(f)$经τ映为G的可容许表示$\pi(g)$，而$\pi(g)$又经σ映为$\mathscr{H}(G)$的可容许表示$\tilde{\pi}(f)$，则

$$\langle\tilde{\pi}(f)u,v\rangle=\int_G f(g)\langle\pi(g)u,v\rangle\mathrm{d}g.$$

仿照§1的定理1.5证明中(4)的办法，可以证明$\tilde{\pi}(f)=\pi(f)$，故$\sigma\tau=\mathrm{id}$。由此即知σ是一个一一对应。▎

命题3.4在$\mathscr{H}(G)$的可容许表示与第二章所讨论的G的可容许表示之间建立起有机的联系。

§4 限制张量积和G_A的Hecke代数

在本节中，F代表一个代数数域，$[F:\boldsymbol{Q}]<\infty$。以$\Sigma$记由$F$的全体规范化赋值所组成的集合。若$v\in\Sigma$，以$F_v$表示$F$对$v$的完备化域。以$S_\infty$记$F$的所有阿基米德赋值集合。通常，我们用$v|\infty$表示$v\in S_\infty$，而用$v<\infty$表示$v\in\Sigma\backslash S_\infty$。我们又用$\boldsymbol{A}$表示$F$的Adele环，$\boldsymbol{A}^\times$表示$F$的Idele群。这些概念的详细阐述，读者可以在有关的代数数论专著中找到(例如本书后面所列出的A.Weil[1]的书)。

令 $G_F=\mathrm{GL}(2,F)$，$G_v=\mathrm{GL}(2,F_v)$，而

$$K_v=\begin{cases}U(2), & 若 F_v=\boldsymbol{C},\\ O(2), & 若 F_v=\boldsymbol{R},\\ \mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_{F_v}), & 若 v<\infty.\end{cases}$$

设 $K=\prod K_v, K_\infty=\prod\limits_{v|\infty}K_v$，$G_\infty=\prod\limits_{v|\infty}G_v$. 以 $\mathfrak{g}_\infty$ 表示 G_∞ 的李代数.

现设 S 是 F 的赋值的一个有限集合，且 $S_\infty\subseteq S$. 令

$$G_{A(S)}=\prod_{v\in S}G_v\times\prod_{v\notin S}K_v,$$

则 $G_{A(S)}$是一个局部紧拓扑群($G_{A(S)}$上的拓扑是直积拓扑)。令

$$G_A=\bigcup_S G_{A(S)},$$

这里 S 取遍所有包含S_∞的Σ的有限子集. 在 G_A上取拓扑，使每个 $G_{A(S)}$ 都是一个开子群. 我们下面常把 G_A 写为 $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A})$，并称它为$\{G_v\}$关于$\{K_v\}$的限制直积.

下面介绍向量空间的限制张量积概念，给定一族复向量空间 $\{V_v:v\in B\}$，设 B_0 是指标集 B 的一个有限子集. 对 $v\in B-B_0$，取定一个非零向量 $e_v\in V_v$.对 B 的每个包含 B_0 的有限子集 S，令

$$V_S=\bigotimes_{v\in S}V_v.$$

如果S,S'是两个包含B_0的有限子集，且 $S\subseteq S_0$，我们定义

$$\phi_S:V_S\to V_{S'},\quad \bigotimes_{v\in S}x_v\mapsto\Big(\bigotimes_{v\in S}x_v\Big)\bigotimes_{v\in S'-S}e_v.$$

这样，对$\{V_S,\phi_S\}$取直极限

$$V=\varinjlim_S V_S.$$

我们称 V 为$\{V_v\}$关于 e_v的限制张量积，记作$\bigotimes\limits_{e_u}V_v$. 显然，$V$ 由以下向量生成：$\otimes x_v$，其中除了有限个v以外，都有 $x_v=e_v$.

现设每个V_v都是A_v模($v\in B$,A_v为线性结合代数),又设除有限个v之外,都有幂等元$\xi_v\in A_v$,使$\xi_v e_v=e_v$，此时，$\bigotimes_{e_v}V_v$成为$\bigotimes_{\xi_v}A_v$模。如果又有$e'_v\in V_v$，使$\xi_v e'_v=e'_v$，则$\bigotimes_{e'_v}V_v$和$\bigotimes_{e_v}V_v$是同构的$\bigotimes_{\xi_v}A_v$模。

定义4.1 设F为代数数域，Σ为F全体规范化赋值组成的集合。对$v\in\Sigma$，以$\mathscr{H}_v$记G_v的Hecke代数。令

$$\chi_{K_v}(x)=\begin{cases}1, & 若x\in K_v,\\ 0, & 若x\notin K_v.\end{cases}$$

取定μ_v为G_v的一个左不变Haar测度，令$\varepsilon_v=\mu_v(K_v)^{-1}\chi_v\in\mathscr{H}_v$。称$\mathscr{H}_A=\bigotimes_{\varepsilon_v}\mathscr{H}_v$为$G_A$的Hecke代数，简记为$\mathscr{H}$。

因为$\mathscr{H}$中每个元素都可以表示成

$$\Sigma c_f f,\quad c_f\in\mathbf{C}$$

的形状，其中$f=\otimes f_v$，且对赋值集合Σ的有限子集S，当$v\notin S$时令$f_v=\varepsilon_v$。若$S'\supseteq S$，则在群

$$G_{A(S')}=\left\{\prod_{v\in S'}G_v\right\}\times\left\{\prod_{v\notin S'}K_v\right\}$$

中，我们可以引进测度f_v的直积$f_{S'}$。由于

$$G_A=\xrightarrow{\lim}G_{A(S)},$$

而且在每个$G_{A(S)}$上这些测度f_S是相容的，于是它们总合起来成为G_A上的一个测度f。

如果对每个$v\in\Sigma$，f_v是G_v上的函数，则上面指出的测度f就是G_A上的函数。这些函数生成的$\mathscr{H}$的子空间我们记为$\mathscr{H}_1$。

下列有限和

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\otimes\xi_v^i$$

(其中ξ_v^i是$\mathscr{H}_v$的初等幂等元)称为$\mathscr{H}$的一个初等幂等元。

定义4.2 设给定$\mathscr{H}$的一个表示(π,V)。如果下列条件成立，则称(π,V)是$\mathscr{H}$的**可容许表示**。

(1) $\forall w\in V$，$\exists f_i\in\mathscr{H}_1$，$w_i\in V$，使

$$w=\sum_{i=1}^{n}\pi(f_i)w_i;$$

(2) 设ξ是$\mathscr{H}$的一个初等幂等元素，则$\dim\pi(\xi)V<\infty$;

(3) 设$v_0|\infty$。又设对每个$v\in\Sigma$都给定一个初等幂等元ξ_v，使除有限个v之外，都有$\xi_v=\varepsilon_v$。又令

$$\xi=\bigotimes_v\xi_v.$$

则对任意$w\in V$，映射

$$\xi_{v_0}\mathscr{H}_{v_0}\xi_{v_0}\to\pi(\xi)V:f_{v_0}\mapsto\pi\left(f_{v_0}\otimes\left(\bigotimes_{v\neq v_0}\xi_v\right)\right)w$$

是连续的。

对于群G_A的一个表示(π,V)，如果下面条件成立，则称为可容许G_A模。

(1) V是$(\mathfrak{g}_\infty,K_\infty)$模;

(2) V是光滑G_A模;

(3) $(\mathfrak{g}_\infty,K_\infty)$模的作用和$G_A$模的作用是交换的;

(4) 对K的任一连续不可约表示的等价类v，V中v等价类子空间是有限维的。

现在假定对每一个F的赋值v，都给定$\mathscr{H}_v$的一个可容许表示(π_v,V_v)，使得除有限个v以外，$\pi_v(\varepsilon_v)V_v\neq0$，且当$\pi_v(\varepsilon_v)V_v\neq0$时，$\dim\pi_v(\varepsilon_v)V_v=1$。除有限个$v$以外，选取$e_v\in V_v$，使$\pi_v(\varepsilon_n)e_v=e_v$。令$V=\bigotimes_{e_v}V_v$，$\pi=\bigotimes_v\pi_v$。我们有

引理4.1 (π, V)是$\mathscr{H}_A$的可容许表示。

证 首先，只要对形如$w=\otimes w_v$的向量来验证定义 4.2 中的条件(1)。设T是一个包含F的全体阿基米德赋值的Σ的有限子集。若$v\overline{\in} T$，取$w_v=e_v$，并令$f_v=\varepsilon_v$，那么，$w_v=\pi(f_v)w_v$。如果$v\in T$，我们令

$$w_v=\sum_i \pi_v(f_v^i)w_v^i.$$

于是

$$\begin{aligned} w&=\left\{\bigotimes_{v\in T}\sum_i \pi_v(f_v^i)w_v^i\right\}\otimes\left\{\bigotimes_{v\overline{\in} T}\pi(f_v)w_v\right\}\\ &=\sum_i \pi(f_i)w_i, \end{aligned}$$

其中

$$\pi(f_i)=\left\{\bigotimes_{v\in T}\pi_v(f_v^i)\right\}\otimes\left\{\bigotimes_{v\overline{\in} T}\pi(f_v)\right\},$$

$$w_i=\left\{\bigotimes_{v\in T}w_v^i\right\}\otimes\left\{\bigotimes_{v\overline{\in} T}w_v\right\}.$$

定义4.2 中的条件(2)只需对形如$\xi=\otimes\xi_v$的初等幂等元素来验证就可以了。此时，我们有

$$\pi(\xi)V=\otimes\pi(\xi_v)V_v.$$

因为对所有v，$\pi(\xi_v)V_v$都是有限维的，除了有限个v之外，

$$\xi_v=\varepsilon_v,\qquad \pi(\xi_v)V_v=\pi(\varepsilon_v)V_v.$$

按假定，$\pi(\varepsilon_v)V_v$维数小于等于 1．由此知$\pi(\xi)V$是有限维的。

定义4.2的最后一个条件可以由π_{v_0}是$\mathscr{H}_{v_0}$的可容许表示这一条件推出(参看§2的定义2.2)。▌

反过来说，对每个$\mathscr{H}_v$的一个表示(π_v, V_v)，如果除有限个v外，有$\pi_v(\varepsilon_v)V_v\neq 0$，且当$\pi_v(\varepsilon_v)V_v\neq 0$时，有

$$\dim\pi_v(\varepsilon_v)V_v=1.$$

除有限个v外，选取$e_v\in V_v$，使得$\pi_v(\varepsilon_v)e_v=e_v$。令

$$V=\bigotimes_{e_v}V_v,\quad \pi=\otimes\pi_v,$$

我们容易看出

引理4.2 若$\pi=\otimes\pi_v$是可容许表示，则对每个$v\in\Sigma$，(π_v, V_v)是可容许表示. ▎

另一方面，我们也容易看出，有如下的

引理4.3 设(π, V)是$\mathscr{H}$的一个不可约表示，$\xi=\otimes\xi_v$是初等幂等元，令$V(\xi)=\pi(\xi)V$，$\mathscr{L}(\xi)=\mathrm{End}(\pi(\xi)V)$，则

(1) π定义了$\xi\mathscr{H}\xi$在$V(\xi)$上的一个表示π_ξ;

(2) $\pi_\xi(\xi\mathscr{H}\xi)=\mathscr{L}(\xi)$. ▎

下面我们来给出一个有关$\mathscr{H}$表示的不可约性的引理.

引理4.4 符号如上. $\mathscr{H}$的表示$\pi=\otimes\pi_v$是不可约表示的充分必要条件是：每个π_v是$\mathscr{H}_v$的不可约表示.

证 设每个π_v不可约，又设ξ_v是$\mathscr{H}_v$的初等幂等元素. 如果$\pi_v(\xi_v)\neq 0$，我们得到$\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v$在$\pi_v(\xi_v)V_v$上的一个表示π_{ξ_v}. 因为π_v不可约，故下列映射

$$\pi_{\xi_v}:\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v\to\mathscr{L}(\xi_v)=\mathrm{End}(V(\xi_v))$$

(其中$V(\xi_v)=\pi_v(\xi_v)V_v$)是一个满射. 我们只要证明：对$\mathscr{H}$的每个形如$\xi=\otimes\xi_v$的初等幂等元，$\xi\mathscr{H}\xi$在$V(\xi)=\pi(\xi)V$上的表示是不可约的，由此立即推出$\pi=\otimes\pi_v$是不可约的.

设T是Σ的一个有限子集，对$v\in T$，令$\xi_v=\varepsilon_v$. 那么

$$V(\xi)=\otimes V(\xi_v)\cong\bigotimes_{v\in T}V(\xi_v).$$

$\bigotimes\limits_{v\in T}V(\xi_v)$的全线性变换环是$\bigotimes\limits_{v\in T}\mathscr{L}(\xi_v)$，故$V(\xi)$的全线性变换环是

$$\left\{\bigotimes_{v\in T}\mathscr{L}(\xi_v)\right\}\otimes\left\{\bigotimes_{v\overline{\in}T}\pi(\varepsilon_v)\right\}.$$

它是

$$\left\{\bigotimes_{v\in T}\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v\right\}\otimes\left\{\bigotimes_{v\overline{\in}T}\xi_v\right\}$$

在π下的象，但上面集合显然包含在$\xi\mathscr{H}\xi$内. 这表明：$\xi\mathscr{H}\xi$在

π下映为$\pi(\xi)V=V(\xi)$上的全线性变换环，从而是不可约的.

反之，若$\pi=\otimes\pi_v$不可约，则容易看出每个π_v不可约. ∎

我们又有下面易证的

引理4.5 设(π,V)是$\mathscr{H}$的可容许表示. 对任意一个$u\in V$，取$\xi=\otimes\xi_v$，使$\pi(\xi)u=u$. 对$f\in\mathscr{H}_v$，定义

$$\eta(f)u=\pi\left(f\xi_v\otimes\left\{\bigotimes_{w\neq v}\xi_w\right\}\right)u,$$

则

(1) (η,V)是$\mathscr{H}_v$的一个表示；

(2) η是与π_v等价的表示的直和. ∎

从现在开始，直至本节终了为止，我们总假定(π,V)是$\mathscr{H}$的一个可容许的不可约表示.

现在令$\xi=\otimes\xi_v$是$\mathscr{H}$的一个初等幂等元素，而

$$\otimes\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v\cong\xi\mathscr{H}\xi.$$

我们考察如下的映射：

$$\pi_\xi^v:\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v\to\mathscr{L}(\xi)=\mathrm{End}(\pi(\xi)V),$$

$$f_v\mapsto f_v\otimes\left(\bigotimes_{w\neq v}\xi_w\right)\mapsto\pi_\xi\left(f_v\otimes\left(\bigotimes_{w\neq v}\xi_w\right)\right)\in\mathscr{L}(\xi).$$

我们将$\pi_\xi\left(f_v\otimes\left(\bigotimes_{w\neq v}\xi_w\right)\right)$所生成的$\mathscr{L}(\xi)$的子代数记作$\mathscr{L}_v(\xi)$.如果$v\neq w$,则$\mathscr{L}_v(\xi)$的元与$\mathscr{L}_w(\xi)$的元交换. $\mathscr{L}(\xi)$和$\mathscr{L}_v(\xi)$均同时以$\pi_\xi(\xi)$为单位元. 对这些单位元取代数$\mathscr{L}_v(\xi)$的限制张量积$\bigotimes_v\mathscr{L}_v(\xi)$.

设

$$I=\{\xi=\otimes\xi_v:\xi\text{ 是}\mathscr{H}\text{的初等幂等元，}\pi(\xi)\neq0\}.$$

对于$\xi,\xi'\in I$，若$\xi'\xi=\xi$，则我们写$\xi\leqslant\xi'$. 此时有$\xi\xi'=\xi$，且若$\xi=\otimes\xi_v$，$\xi'=\otimes\xi'_v$，则

$$\xi\leqslant\xi'\Longleftrightarrow\xi_v\xi'_v=\xi'_v\xi_v=\xi_v.$$

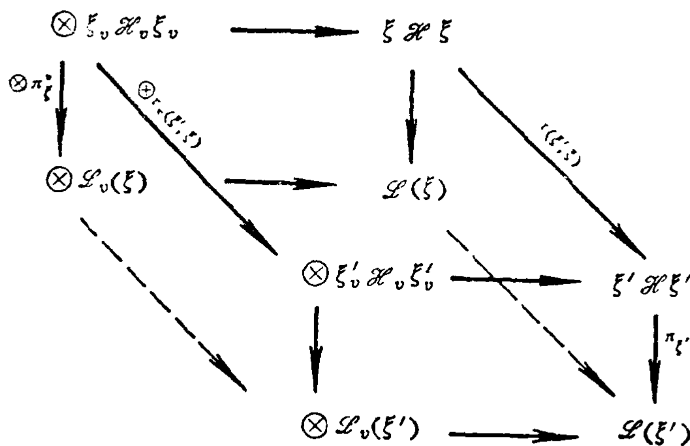
如果$\xi,\xi'\in I$，$\xi\leqslant\xi'$,则$\xi\mathscr{H}\xi$是$\xi'\mathscr{H}\xi'$的子代数，于是有一个

嵌入同态

$$\tau(\xi',\xi):\xi\mathscr{H}\xi\rightarrow\xi'\mathscr{H}\xi'.$$

同样有嵌入 $\tau_v(\xi',\xi):\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v\rightarrow\xi'_v\mathscr{H}_v\xi'_v$。

作为进一步研究表示 π 的预备工作，我们将先证明有交换图：$\xi\leqslant\xi'$，



然后，把这个交换图对 ξ 取极限得新的交换图如下：

$$\begin{array}{ccc}\otimes\mathscr{H}_v & \longrightarrow & \mathscr{H}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \otimes\mathscr{L}_v & \longrightarrow & \mathscr{L}\end{array}$$

引理4.6 符号如上。我们有

(1) $\mathscr{L}_v(\xi)$是一个单代数；

(2) 映射 Φ：

$$\otimes\mathscr{L}_v(\xi)\rightarrow\mathscr{L}(\xi):\otimes\lambda_v\mapsto\prod_v\lambda_v$$

是一个同构映射。

证 要证明 $\mathscr{L}_v(\xi)$ 是单代数，我们仅需证明 $V(\xi)$ 作为一个忠实的 $\mathscr{L}_v(\xi)$ 模是由一族互相等价的不可约子模所张成的就可以了。设 M 是一个任意的不可约子模，又设 T 取遍

$$\phi\left\{1_v\otimes\left\{\bigotimes_{w\neq v}\mathscr{L}_w(\xi)\right\}\right\}$$ （这里 1_v 是 $\mathscr{L}_v(\xi)$ 的单位元素），

则族 $\{TM\}$ 张成 $V(\xi)$，这里每个 TM 或为 0，或等价于 M. 这是因为 T 与 $\mathscr{L}_v(\xi)$ 的元素可交换的缘故。

再来证明 ϕ 是一个同构映射。因为 $\otimes\mathscr{L}_v(\xi)$ 是 $\bigotimes_{v\in T}\mathscr{L}_v(\xi)$（这里 T 是 Σ 的有限子集）的直极限，我们仅需证明在这些子代数上映射是单射，则 ϕ 就是一个单射。但因为 $\otimes\mathscr{L}_v(\xi)$ 是单代数的张量积，应当是一个单代数，故映射自然是单的。

另一方面，我们可以把 $\otimes\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v$ 和 $\xi\mathscr{H}\xi$ 等同看待，于是我们有下面的交换图：

$$\begin{array}{ccc}\otimes\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v & \longrightarrow & \xi\mathscr{H}\xi\\ \otimes\pi^v_\xi\downarrow & & \downarrow\pi_\xi\\ \otimes\mathscr{L}_v(\xi) & \xrightarrow{\phi} & \mathscr{L}(\xi)\end{array}$$

由此可知 ϕ 是满射。从而 ϕ 是同构映射。 ▎

引理4.7 存在唯一的映射 $\phi(\xi',\xi):\mathscr{L}(\xi)\to\mathscr{L}(\xi')$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc}\xi\mathscr{H}\xi & \xrightarrow{\tau(\xi',\xi)} & \xi'\mathscr{H}\xi'\\ \pi_\xi\downarrow & & \downarrow\pi_{\xi'}\\ \mathscr{L}(\xi) & \xrightarrow{\phi(\xi',\xi)} & \mathscr{L}(\xi')\end{array}$$

证 $\phi(\xi',\xi)$ 可由上面图的交换性的要求定义出来。显然，这样的 $\phi(\xi',\xi)$ 是唯一的（因为 π_ξ 是满射）。 ▎

设 $\xi\leqslant\xi'$，我们令 $\tau_v(\xi',\xi)$ 表示 $\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v$ 到 $\xi'_v\mathscr{H}_v\xi'_v$ 的嵌入映射。那么 $\tau(\xi',\xi)=\otimes\tau_v(\xi',\xi)$，则存在 $\phi_v(\xi',\xi)$，为 $\mathscr{L}_v(\xi)$ 到 $\mathscr{L}_v(\xi')$ 的映射，使下图交换（参看下面引理的证明）：

$$\begin{array}{ccc}\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v & \xrightarrow{\tau_v(\xi',\xi)} & \xi'_v\mathscr{H}_v\xi'_v\\ \pi^v_\xi\downarrow & & \downarrow\pi^v_{\xi'}\\ \mathscr{L}_v(\xi) & \xrightarrow{\phi_v(\xi',\xi)} & \mathscr{L}_v(\xi)\end{array}$$

那么，我们有下面的

引理4.8 如果$\xi\leqslant\xi'$，则存在映射$\otimes\phi_v(\xi',\xi)$：

$$\otimes\mathscr{L}_v(\xi)\to\otimes\mathscr{L}_v(\xi')$$

使下面的图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\otimes\xi_v\mathscr{H}_v\xi_v & \xrightarrow{\tau(\xi',\xi)} & \otimes\xi'_v\mathscr{H}_v\xi'_v \\
\downarrow & & \downarrow \\
\otimes\mathscr{L}_v(\xi) & \xrightarrow{\otimes\phi_v(\xi',\xi)} & \otimes\mathscr{L}_v(\xi') \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{L}(\xi) & \xrightarrow{\phi(\xi',\xi)} & \mathscr{L}(\xi')
\end{array}$$

证 我们来证明：若$f_v\in\xi_v\mathscr{H}\xi_v\subseteq\xi'_v\mathscr{H}\xi'_v$，则

$$\pi_\xi^v(f_v)=0\Longleftrightarrow\pi_{\xi'}^v(f_v)=0.$$

为此，令$U=\pi_\xi^v(f_v)$，$T=\pi_{\xi'}^v(f_v)$。若

$$E=\pi_{\xi'}\left(\xi'_v\otimes\left\{\bigotimes_{w\neq v}\xi_w\right\}\right),$$

那么

$$TE=\pi_{\xi'}\left(f_v\otimes\left\{\bigotimes_{w\neq v}\xi_w\right\}\right).$$

上式由它在$V(\xi)$内的限制所完全决定，而这个限制就是U。

设$S\subseteq\Sigma$是一个充分大的有限集，则映射

$$\bigotimes_{w\in S}\mathscr{L}_w(\xi')\to\mathscr{L}(\xi')$$

是一个同构映射。设$v\in S$，此时E属于$1_v\otimes\left\{\bigotimes_{w\neq v}\mathscr{L}_w(\xi')\right\}$的象$M$。$M$是单的，$E\neq0$。故存在$A_i,B_i\in M(i=1,\cdots,r)$，使

$$\sum_{i=1}^{r}A_iEB_i=1,$$

于是

$$T=\sum_i TA_iEB_i=\sum_i A_iTEB_i.$$

故$T=0$当且仅当$U=0$。

根据上面的讨论，我们立即推知，本引理前面所提出的映射$\phi_v(\xi',\xi)$是存在的。于是引理得证。▎

现在我们可以对 I 取直极限，显然有

$$\mathscr{H} = \xrightarrow[I]{\lim} \xi\mathscr{H}\xi, \qquad \mathscr{H}_v = \xrightarrow[I]{\lim} \xi_v\mathscr{H}\xi_v.$$

又令

$$\mathscr{L} = \xrightarrow[I]{\lim} L(\xi), \qquad \mathscr{L}_v = \xrightarrow[I]{\lim} L(\xi_v).$$

引理4.9 存在映射

$$\pi^v: \mathscr{H}_v \to \mathscr{L}_v,$$

使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \otimes\mathscr{H}_v & \longrightarrow & \mathscr{H} \\ {\scriptstyle \otimes\pi^v}\downarrow & & \downarrow \\ \otimes L_v & \longrightarrow & \mathscr{L} \end{array}$$

(其中行的映射是同构映射)，而且$\mathscr{L}$在V的作用是忠实的。

证 因为我们有映射

$$\pi_{\xi_v}: \xi_v\mathscr{H}_v\xi_v \to \mathscr{L}(\xi_v),$$

利用它可得到所需要的映射 π^v。 ▌

引理4.10 设代数 $A = \bigcup\limits_\lambda A_\lambda$，这里 A_λ是矩阵代数。如果对每个 λ，存在A的一个幂等元素 e_λ，使 $A_\lambda = e_\lambda A e_\lambda$，而且对已给定的 λ_1, λ_2，存在 λ_3，使 $A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \subseteq A_{\lambda_3}$，则$A$是单代数，且包含一个极小左理想。如果 J 是 A 的极小左理想，则A的任一忠实表示(π, X)必与A在J上的表示等价。

证 (1) 我们证明：如果 $0 \neq a \in A$，$I \neq 0$ 是A的左理想，则 $aI \neq 0$。事实上，因为 AaA 是A的双边理想，A显然是单代数，所以 $AaA = A$。如果 $aI = 0$，则 $I = AI = AaAI = AaI = A \cdot 0 = 0$，与假设 $I \neq 0$ 矛盾。

(2) 取A的幂等元 e，设 $A_1 = eAe$。令 J_1 是 A_1 的极小左理想，及 $J = AJ_1$。如果 J 不是A的极小左理想，则它应真包含一个非零的A的左理想 J'。因为 J_1是 A_1的极小左理想，所以 $J' \cap A_1 = 0$。因为 $J_1 \subset eAe$，而 $e^2 = e$，所以 $J'e = J'$。又因为 J' 是A的

左理想，所以 $eJ'\subseteq J'$。于是

$$eJ'=eJ'e\subseteq J'\cap A_1=0.$$

这样我们便有 $e\neq 0$，$J'\neq 0$ 而 $eJ'=0$。这是与(1) 所证矛盾。故 J 为 A 的极小左理想。

(3) 利用第(2)步立刻可见引理中的代数 A 有极小左理想.

(4) (π,X) 是忠实表示，即对 $a\in A$，若 $\pi(a)X=0$，则 $a=0$。现取 $x_0\in X$，使得 $Jx_0\neq 0$。则从下图立见 π 与 A 在 J 上的左平移表示等价。

$$\begin{array}{ccccccc} J & \xrightarrow{a} & J & : & j & \longmapsto & aj \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & & \pi(aj)x_0 \\ & & & & & & \| \\ X & \xrightarrow{a} & X & : & \pi(j)x_0 & \longmapsto & \pi(a)(\pi(j)x_0) \end{array}$$

证毕。▎

定义4.3 称$\mathscr{H}$ 的一个可容许表示是**可因子分解的**，如果它与一个用可容许表示作出的限制张量积等价。

下面我们来叙述和证明本节的主要命题。

命题4.11 $\mathscr{H}$的任一个可容许不可约表示是可因子分解的。而且除等价外，所有因子是唯一决定的。

证 设(π,V)是$\mathscr{H}$的可容许不可约表示。由引理 4.9和4.10我们立刻知道要证明 π 是可因子分解的，只需证明：$\mathscr{L}$有一个极小左理想，$\mathscr{L}$在这个极小左理想上的表示是 $\mathscr{L}_v$的表示 σ_v的张量积，且 $\sigma_v\circ\pi^v$是可容许的，其中 $\pi^v:\mathscr{H}_v\to\mathscr{L}_v$。

现在$\mathscr{L}$和$\mathscr{L}_v$满足引理4.10的条件，粗略地说，$\mathscr{L}$是$\mathscr{L}(\xi)$的并集，而 $\mathscr{L}_v$是$\mathscr{L}_v(\xi)$ 的并集。选取 ξ，使 $V(\xi)\neq 0$，又令 J_v是$\mathscr{L}_v(\xi)$的一个极小左理想。因为对几乎所有的 v(即除有限个 v之外)，$\dim\mathscr{L}_v(\xi)=1$，所以对几乎所有的 v，我们有 $J_v=\mathscr{L}_v(\xi)$。于是我们可以有 $J=\otimes J_v$，且 J 是$\mathscr{L}(\xi)$的一个极小左理想。这时$\mathscr{L}J=\otimes\mathscr{L}_vJ_v$。这里$\mathscr{L}J$ 是$\mathscr{L}$的一个极小左理想，而$\mathscr{L}_vJ_v$ 是$\mathscr{L}_v$的一个极小左理想。$\mathscr{L}$在$\mathscr{L}J$ 上的表示自然是$\mathscr{L}_v$在$\mathscr{L}_vJ_v$上的表

示σ_v的张量积。

于是，π等价于表示$\pi_v=\sigma_v\circ\pi^v$的张量积。根据引理4.4，表示π_v是不可约的，再根据引理4.2，π_v是可容许的。这样，命题的第一个论断得证。

从$\mathscr{H}$的可容许表示(π,V)出发，对$v\in\Sigma$，我们来导出$\mathscr{H}_v$在V上的一个表示，记为η：对$u\in V$，选取$\xi=\bigotimes\xi_w$，使$\eta(\xi)u=u$。对任意$f\in\mathscr{H}_v$，我们令

$$\eta(f)u=\pi\left(f\xi_v\otimes\left\{\bigotimes_{w\neq v}\xi_w\right\}\right)u.$$

那么，根据引理4.5，$\eta(f)$是$\mathscr{H}_v$的一个表示，且这个表示是与π_v等价的表示的直和。这样，我们的命题的第二个论断也已得到证明。▌

命题4.11将讨论整体域F的 Adele 环$\boldsymbol{A}$上的矩阵群$\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A})$的 Hecke 代数$\mathscr{H}$的可容许不可约表示，归结为$\mathscr{H}_v(v\in\Sigma)$的可容许不可约表示问题，而后者已在前面两章以及本章的§2，§3中作了详细的研讨。因而至此为止，我们的讨论课题已得到了较为完整的答案了。

习 题 三

1．F是代数数域。设X是F^n的格。

(1) 对$g\in G_{\boldsymbol{A}}=\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{A})$证明

$$g(X)=\bigcap_v g_v(\mathscr{O}_{F_v}\cdot X)$$

是F^n的格。以$\mathscr{L}$记由F^n所有的格所组成的集合，则$G_{\boldsymbol{A}}$在$\mathscr{L}$上的作用是可递的。

(2) 证明固定格$\mathscr{O}_F^n$的子群

$$\{g\in G_{\boldsymbol{A}}:g\cdot\mathscr{O}_F^n=\mathscr{O}_F^n\}$$

是

$$G_{\boldsymbol{A}(\infty)}=\prod_{v\mid\infty}G_{F_v}\times\prod_{v<\infty}\mathrm{GL}(2,\mathscr{O}_{F_v}).$$

所以双陪集集合 $G_F\backslash G_A/G_{A(\infty)}$ 与 F^n 内的格的同构类集合成一一对应。若X为F^n的格，则F有分式理想 I_X，使得X与 $\mathscr{O}_F^{n-1}\oplus I$ 同构，而且 I_X 的类数 $c(I_X)$由X决定。格X与格 X' 同构的充要条件是 $c(I_X)=c(I_{X'})$。

(3) 设 h 是F的类数。证明存在 $g_i\in G_A$，$1\leqslant i\leqslant h$，使得

$$G_A=\bigcup_{i=1}^{h}G_F g_i G_{A(\infty)}.$$

2．F是代数数域，$G=\mathrm{GL}(2)/F$。设 G_{A_f} 有紧开子群L及有限子集C，使得

$$G_A=G_F C G_\infty L,$$

即 G_A 是开集 $G_F cG_\infty L(c\in C)$的并集。设

$$\Gamma_c=G_F\cap(G_\infty\times cLc^{-1}).$$

(1) 证明：指数

$$[\Gamma_c:\Gamma_c\cap G_{\mathscr{O}_F}]<\infty,\quad [G_{\mathscr{O}_F}:\Gamma_c\cap G_{\mathscr{O}_F}]<\infty.$$

因为

$$c^{-1}G_F c\cap G_\infty\times L=c^{-1}\Gamma_c c,$$

所以 $G_F cG_\infty L$ 是$G_F cx$ $(x\in c^{-1}\Gamma_c c\backslash G_\infty\times L)$的并集。

(2) 证明 $G_F\backslash G_A$ 同构于并集 $\bigcup\limits_{c\in C}c^{-1}\Gamma c\backslash G_\infty\times L$。请利用投射

$$c^{-1}\Gamma_c c\backslash G_\infty\times L\to\Gamma_c\backslash G_\infty.$$

(3) 证明有同构

$$G_F\backslash G_A/L\approx\bigcup_{c\in C}\Gamma_c\backslash G_\infty.$$

对 G_A/L 上的函数 f，设 $f_c:x\mapsto f(c\cdot x)$为 G_∞ 的函数。

(4) 证明 f 是 G_F 左不变的充要条件是对所有的 $c\in C$，f_c是 Γ_c 左不变。(这就是说 $G_F\backslash G_A/L$ 的函数与$\coprod\limits_{c\in C}\Gamma_c\backslash G_\infty$的函数成一一对应。)

3．设 $G=\mathrm{GL}(2)/\mathbf{Q}$，$p=\infty,2,3,5,\cdots$，$(\pi,H)$是 G_A的不可

约酉表示，H是可分 Hilbert 空间，

$$G_p = \mathrm{GL}(2, \mathbf{Q}_p),$$

$$G' = \{(g_l) \in G_A : g_p = 1\},$$

$$G_A = G_p \times G^p, \quad \tilde{K}^p = \prod_{l>p} \mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}_l),$$

$$\tilde{G}^p = \{(g_l) \in G_A : g_l = 1, \text{若 } l < p\},$$

假设对每一个 p 有分解

$$H = H_p \otimes H^p, \quad \pi = \pi_p \otimes \pi^p,$$

其中(π_p, H_p)是 G_p 的不可约表示，(π^p, H^p)是 G^p 的不可约表示。

(1) 证明：因为 $\tilde{K}^p$ 收敛于 1，所以存在 p_0 和向量 $v^0 \in H$，使得对 $k \in \tilde{K}^{p_0}$ 有 $\pi(k)v^0 = v^0$。在 H^p取正交基$\{u_i^p\}$，对 $p \geqslant p_0$，v^0 可以唯一的表示为

$$v^0 = \sum_i v_{p,i}^0 \otimes u_i^p, \quad v_{p,i}^0 \in H_p.$$

(2) 证明：对 $k \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}_p)$，$\pi_p(k) v_{p,i}^0 = v_{p,i}^0$。在 H_p 取标准正交基$\{v_{p,i}\}$，可要求当 $p \geqslant p_0$ 时，$v_{p,1}$ 在 $\pi_p|_{\mathrm{GL}(2,\mathbf{Z}_p)}$ 下不变。(π, H)亦可分解为

$$\pi = \left(\bigotimes_{l<p} \pi_l\right) \otimes \tilde{\pi}^p, \quad H = \left(\bigotimes_{l<p} H_l\right) \otimes \tilde{H}^p,$$

其中$(\tilde{\pi}^p, \tilde{H}^p)$是$\tilde{G}^p$ 的不可约表示。

(3) 证明：存在向量$v \in H$，使得对 $k \in \tilde{K}^{p_0}$，有 $\pi(k)v = v$，

$v = \prod_{l<p_0} v_{l,1} \cdot \tilde{v}$，$\tilde{v} \in \tilde{H}^{p_0}$，$\|\tilde{v}\| = 1$；对 $k \in \tilde{K}^{p_0}$ 有 $\tilde{\pi}^{p_0}(k)\tilde{v} = \tilde{v}$，

及当 $p \geqslant p_0$ 时有

$$\tilde{v} = \prod_{p_0 < l < p} v_{l,1} \cdot \tilde{v}' \quad \text{和} \quad \tilde{v}' = \prod_{l \geqslant p} v_{p,1}.$$

以 H' 记由以下向量所生成的H的闭子空间：

$$v = \prod_{l<p} v_{l,i_l} \cdot \tilde{v}^p = \prod_{l<p} v_{l,i_l} \cdot \prod_{l \geqslant p} v_{l,1} \quad (p \geqslant p_0)$$

显然这些向量是 H' 的正交基。

(4) 证明:

$$\pi(G_A)H' \subseteq H' \quad 及 \quad H = H', \quad \pi = \bigotimes_{\bullet p,1} \pi_p.$$

4. 设 $G = \mathrm{GL}(2)/F$，F = 代数数域，

$$K = O(\boldsymbol{R}) \prod_{v<\infty} \mathrm{GL}(2, \mathscr{O}_{F_v}).$$

$f \in C_c^\infty(G_A)^K$ 是指 f 是 G_A 上的有紧子集的光滑 K 有限函数。证明: 任一 $f \in C_c^\infty(G(\boldsymbol{A}))^K$ 是卷积和，即 $\exists f_i^1, f_i^2 \in C_c^\infty(G(\boldsymbol{A}))^K$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，使得

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i^1 * f_i^2.$$

5. F 是代数数域，$G = \mathrm{GL}(2)/F$，$\mathscr{H}$ 是 G_A 的 Hecke 代数，(π, V) 是 $\mathscr{H}$ 的可容许表示。若 V 有正定 Hermite 型 $(\cdot, \cdot)$，使得对 $f \in \mathscr{H}$ 有

$$(\pi(f))v_1, v_2) = (v_1, \pi(f^*)v_2),$$

其中 $f^*(g) = \bar{f}(g^{-1})$，则称 π 为酉表示。现设 (π, V) 是 $\mathscr{H}$ 的可容许酉表示。证明

(1) V 包含极小非零不变子空间。

(2) 如果 V_1 是 V 的不变子空间，V_2 是 V_1 的正交补，则有直和

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

(3) V 是互相正交的不可约不变子空间的代数直和。

第四章 自 守 形 式

经典的模形式是指定义在上半复平面

$$\mathfrak{h}=\{z\in \boldsymbol{C}: \operatorname{Im} z>0\}$$

满足某些条件的解析函数 f，其中的一个条件一般是这样的：要求有正 整数 $k\geqslant 2$ 及 $SL(2,\boldsymbol{R})$ 的一个“充分大”的离散子群 Γ，使得对

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \Gamma,$$

函数 f 满足以下条件：

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^{k}f(z).$$

如果

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in \Gamma,$$

则以上条件告诉我们 $f(z+1)=f(z)$. 这样我们可以把 f 看作周期函数的推广. 一般的周期函数的周期是交换群 $\boldsymbol{Z}$，而这里的 f 的“周期”是个非交换群 Γ.

本章将用表示论的观点来讨论模形式的理论. 我们将继续用第三章 § 4 所引进的记号.

§ 1 约 化 理 论

为了研究 $G_{F}\backslash G_{A}$ 上的函数的性质，必须找出 G_{A} 的一个容易计算的子集 $\mathfrak{S}$，使得 $G_{F}\mathfrak{S}=G_{A}$. 约化理论就提供 这样的 结果，这里所讨论的 GL(2)的约化理论是 Gauss 的二次型约化理论的现

代化表示形式。

引理1.1 G_F 是 G_A 的离散子群。

证 如果 G_F 不是离散子群，则存在收敛于 G_A 的单位元的序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$，其中 $x_n \in G_F$。由 G_A 的拓扑的定义知道，只要 n 充分大，则对所有非 Archimede 赋值 v，矩阵 x_n 的系数都是在 v 进整数环 $\mathscr{O}_v$ 中，所以都是 F 中的代数整数。但这样的矩阵序列 x_n 不可能在 G 的拓扑收敛。故得矛盾。 ▎

设有有限集 S，S的元是 F 的赋值，$S \supset S_\infty$。设

$$A(S) = \{a \in A : |a_v| \leqslant 1, \text{ 若 } v \bar{\in} S\},$$

$$A^\times(S) = \{a \in A^\times : |a_v| = 1, \text{ 若 } v \bar{\in} S\}.$$

则(1) $A = F + A(S)$；(2) $F \cap A(S)$ 是主理想环；(3) 对应充分大的 S 有

$$A^\times = F^\times A^\times(S)$$

(参看 Weil[1])。

引理1.2 如果 $A^\times = F^\times A^\times(S)$，则 $G_A = G_F G_{A(S)}$。

证 G_A 的任一元可写成

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} k,$$

其中 $k \in K \subseteq G_{A(S)}$。设 $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$，$\gamma = \gamma_1 \gamma_2$，其中 α_1 和 γ_1 属于 $F^\times$，而 $\alpha_2, \gamma_2 \in A^\times(S)$。则

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha_1\gamma_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

显然

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \in G_F, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \in G_{A(S)}.$$

把 $\beta/\alpha_1\gamma_2$ 按 $A = F + A(S)$ 分解为

$$\frac{\beta}{\alpha_1 \gamma_2} = u + v, \quad u \in F, v \in A(S),$$

则

$$\begin{pmatrix}1 & \beta/\alpha_1\gamma_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & v\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G_F,\quad \begin{pmatrix}1 & v\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G_{A(S)}. \blacksquare$$

引理1.3 存在常数 c_0，使得 如果 $g\in G_A$，则有 $\gamma\in G_F$，使

$$\prod_v \max\{|c_v|,|d_v|\}\leqslant c_0|\det g|^{1/2}$$

其中

$$\gamma g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

证 (1) 取 S 充分大，使得 $\boldsymbol{A}^\times=F^\times\boldsymbol{A}^\times(S)$。我们将证明存在满足以下条件的常数 c_0：如果 $g\in G_{A(S)}$，则有 $\gamma\in G_{F\cap A(S)}$，使得

$$\prod_{v\in S}\max\{|c_v|,|d_v|\}\leqslant c_0|\det g|^{1/2},$$

其中

$$\gamma g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

(2) 在加法群 $\boldsymbol{A}(S)$上固定 Haar 测度。这便在 $\boldsymbol{A}(S)\oplus\boldsymbol{A}(S)$上决定了一个测度。群 $L=(F\cap\boldsymbol{A}(S))\oplus(F\cap\boldsymbol{A}(S))$是 $A(S)\oplus\boldsymbol{A}(S)$的离散子群。商 $\boldsymbol{A}(S)\oplus\boldsymbol{A}(S)/L$ 为紧空间，故其测度 $c_1<\infty$。如果 $g\in G_{A(S)}$，以 L_g 记 g 在 L 上作用：$L\cdot g$ 所得子集，则紧空间 $\boldsymbol{A}(S)\oplus\boldsymbol{A}(S)/L_g$ 的测度是 $c_1|\det g|$。

(3) 设 S 有 s 个元。对任意 $R>0$，显然有以下的测度估计：存在正常数 c_3，使得

$$c_3R^{2s}\leqslant \mathrm{vol}\{(m,n)\in\boldsymbol{A}(S)\oplus\boldsymbol{A}(S):\sup_{v\in S}\max\{|m_v|,|n_v|\}\leqslant R\}.$$

(4) 取 c_2 使得 $c_2>2\left(\frac{c_1}{c_3}\right)^{\frac{1}{2s}}$。

(5) 对给定的元素 $g\in G_{A(S)}$，取

$$D_g=\left\{(m,n)\in \mathbf{A}_S\oplus\mathbf{A}_S:(\sup_{v\in S}\max\{|m_v|,|n_v|\})\right.$$

$$\left.\leqslant\frac{c_2}{2}|\det g|^{\frac{1}{2s}}\right\}.$$

(6) 如果对 L_g 所有的非零向量 (m,n) 都有不等式

$$\sup_{v\in S}\max\{|m_v|,|n_v|\}>c_2|\det g|^{\frac{1}{2s}}.$$

则对任意 $x\in L_g$ 有 $D_g\cap(D_g+x)=\varnothing$。所以

$$\mathrm{vol}(D_g)=\mathrm{vol}(D_g/L_g).$$

于是

$$c_1|\det g|=\mathrm{vol}(\mathbf{A}(S)\oplus\mathbf{A}(S)/L_g)$$

$$\geqslant\mathrm{vol}(D_g/L_g)\geqslant c_3\left(\frac{c_2}{2}\right)^{2s}|\det g|,$$

即

$$c_1\geqslant c_3\left(\frac{c_2}{2}\right)^{2s}.$$

这与(4)矛盾，我们证明了：存在常数 c_2，使得对任一 $g\in G_{A(S)}$ 在 L_g 必可找到满足以下不等式的非零向量 (m,n)：

$$\sup_{v\in S}\max\{|m_v|,|n_v|\}\leqslant c_2|\det g|^{1/2s}.$$

(7) 由(6)立刻知有常数 c_0，使得 $\forall g\in G_{A(S)}$，

$$\left\{(m,n)\in L_g:\prod_{v\in S}\max\{|m_v|,|n_v|\}\right.$$

$$\left.\leqslant c_0|\det g|^{1/2}\right\}\neq\{0\}.$$

以 E_g 证以上有非零元的集合。

(8) 设 $(m,n)=(\mu,\nu)g$ 为 L_g 的元。如果 $0\neq a\in F\cap\mathbf{A}(S)$，

则据 Adele 环的乘积公式可推出

$$\prod_{v\in S}\max\{|a_v m_v|,|a_v n_v|\}$$

$$=\Big(\prod_{v\in S}|a_v|\Big)\Big(\prod_{v\in S}\max\{|m_v|,|n_v|\}\Big)$$

$$\geqslant\prod_{v\in S}\max\{|m_v|,|n_v|\}.$$

利用以上不等式及 L 的定义我们可以对 E_g 中的非零元抽公因子：$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$，$a\in \boldsymbol{A}(S)\cap F$。这样便可以假设 E_g 中必有非零元 $(m,n)=(\mu,\nu)g$，其中 μ,ν 互素。于是便可在 $F\cap \boldsymbol{A}(S)$ 中取 η,λ，使得 $\eta\nu-\lambda\mu=1$。设

$$\gamma=\begin{pmatrix} \eta & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}.$$

则 $\gamma\in G_F\cap \boldsymbol{A}(S)$。如果

$$\gamma g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

则 $c=m,d=n$。所以

$$\prod_{v\in S}\max\{|c_v|,|d_v|\}\leqslant c_0|\det g|^{1/2}. \quad \blacksquare$$

定义1.1 设 ω_1 是 $\boldsymbol{A}$ 的紧子集，ω_2 是 $\boldsymbol{A}^\times$ 的紧子集，t 是正常数，v_0 是 F 的 Archimede 赋值。取

$$\mathfrak{S}=\Big\{g\in G_{\boldsymbol{A}}: g=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} bb_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}k,$$

$$x\in\omega_1, z\in \boldsymbol{A}^\times, b\in\omega_2, b_1\in F_{v_0}^\times, |b_1|\geqslant t, k\in K\Big\}.$$

我们以 $\mathfrak{S}(t,\omega_1,\omega_2,v_0)$ 记以上集 $\mathfrak{S}$。称此集为 Siegel 集。

我们亦称以下的集合 $\mathfrak{S}_t$ 为 Siegel 集：

$$\mathfrak{S}_t=\left\{g\in G_A: g=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}k, x\in \boldsymbol{A},\right.$$

$$\left. a_1,a_2\in \boldsymbol{A}^\times, |a_1a_2^{-1}|\geqslant t, k\in K\right\}.$$

设 $A_A^1=\{a\in A_A: |\det a|=1\}$， $A_\infty=\prod_{v|\infty}A_v$， A_∞^0 是 A_∞的单位元连通分支，Z是G的中心．同样定义 Z_∞^0。则

$$A_A=A_A^1\times A_\infty^0,\quad Z_\infty^0\backslash A_\infty^0=\boldsymbol{R}_+^\times.$$

取 N_A 的紧子集 ω_N，使得 $N_F\omega_N=N_A$，A_A^1 的紧子集 ω_A 使得 $A_F\omega_A=A_A^1$。对 $t>0$，设 $A_{\infty,t}^0=\left\{\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_1\end{pmatrix}\in A_\infty^0:\ a_1a_2^{-1}\geqslant t\right\}$。我们亦称以下集合为 Siegel 集：

$$\mathfrak{S}(t,\omega_N,\omega_A)=\omega_N\omega_A A_{\infty,t}^0K.$$

在不同情况下我们用不同定义的 Siegel集$\mathfrak{S}$。我们除要求类似以上的结构外还要求$G_F\mathfrak{S}=G_A$。

引理1.4 固定$v_0|\infty$。存在$\boldsymbol{A}$的紧子集 ω_1，$\boldsymbol{A}^\times$ 的紧子集 ω_2，正常数t，使得

$$G_A=G_F\mathfrak{S}(t,\omega_1,\omega_2,v_0).$$

证 因为$F\backslash\boldsymbol{A}$是紧集，故存在$\boldsymbol{A}$的紧集$\omega_1$，使得

$$F+\omega_1=\boldsymbol{A}.$$

所以 $\quad N_A=N_FN_{\omega_1},\quad N_{\omega_1}=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}: x\in\omega_1\right\}.$

令 c_0 为引理1.3中所定义的常数，固定任一v_0，$v_0|\infty$，则$\exists\, \boldsymbol{A}^\times$的紧子集$\omega_2$，使得

$$\{a\in \boldsymbol{A}^\times: |a|\geqslant c_0^{-2}\}\subseteq\{b_1b_2: b_1\in F_{v_0}^\times, |b_1|_{v_0}\geqslant c_0^{-2}, b_2\in\omega_2\}.$$

取$\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(c_0^{-2},\omega_1,\omega_2,v_0)$。对$g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G_A$，设

$$\Phi(g)=\frac{\prod_v \max\{|c|_v, |d|_v\}}{|\det g|^{1/2}}.$$

则

(1) 因$\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & *\\c & d\end{pmatrix}$, $\det(ng)=\det g$, 故对$n\in N_{\mathbf{A}}$,

$$\Phi(ng)=\Phi(g).$$

(2) 对 $k\in K=\prod_v K_v$, $a\in A_{\mathbf{A}}$, 有

$$\Phi(ak)\leqslant\Phi(a).$$

我们可以这样证明上述不等式：设$k=\begin{pmatrix}r & s\\x & y\end{pmatrix}$, 则

$$v\text{ 为实赋值}\Rightarrow K_v=O(2,\mathbf{R})\Rightarrow|x_v|\leqslant 1,\ |y_v|\leqslant 1,$$
$$v\text{为复赋值}\Rightarrow K_v=U(2)\Rightarrow|x_v|^2+|y_v|^2=1$$
$$\Rightarrow|x_v|\leqslant 1,\ |y_v|\leqslant 1,$$
$$v<\infty\Rightarrow K_v=\mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_v)\Rightarrow|x_v|\leqslant 1,\ |y_v|\leqslant 1.$$

所以

$$ak=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r & s\\x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & *\\a_2x & a_2y\end{pmatrix},$$

$$\prod_v\max\{|a_2x|_v,\ |a_2y|_v\}=\prod_v|a_2|_v\max\{|x_v|,|y_v|\}\leqslant|a_2|.$$

于是便有

$$\Phi(ak)=\frac{\prod_v\max\{|a_2x|_v,|a_2y|_v\}}{|\det(ak)|^{1/2}}$$

$$\leqslant\frac{|a_2|}{|\det a|^{1/2}}=\Phi(a)\quad(\text{因为}|\det k|=1).$$

(3) 对$g\in G_{\mathbf{A}}$, 由引理1.3, 知有$\gamma\in G_F$使得, 若

$$\gamma g=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix},$$

则

$$\Phi(\gamma g)=\frac{\prod_v \max\{|c|_v,|d|_v\}}{\det(\gamma g)}=\frac{\prod_v \max\{|c|_v,|d|_v\}}{\det g}\leqslant c_0.$$

（我们从乘积公式知道$|\det\gamma|=1$。）

若$\gamma g=nak$是Iwasawa分解，则

$$\Phi(\gamma g)=\Phi(n^{-1}\gamma g)=\Phi(ak).$$

而

$$\Phi(a)=\Phi((ak)k^{-1})\leqslant\Phi(ak)=\Phi(\gamma g)\leqslant c_0.$$

若$a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}$，则 $\Phi(a)=\dfrac{|a_2|}{|a_1a_2|^{1/2}}=|a_1a_2^{-1}|^{-1/2}$.

所以

$$\begin{aligned}\Phi(a)\leqslant c_0 &\Rightarrow |a_1a_2^{-1}|\geqslant c_0^{-2}\\ &\Rightarrow a=\begin{pmatrix}a_2 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1a_2^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{及}|a_1a_2^{-1}|\geqslant c_0^{-2}\\ &\Rightarrow a\in\mathfrak{S}.\end{aligned}$$

现在已证：对任一$g\in G_A$存在$\gamma\in G_F$，使得

$$\gamma g=nak,\quad a\in\mathfrak{S}.$$

用$N_A=N_FN_{\infty_1}$,知有$\gamma'\in N_F$使得$n=\gamma' n_1,n_1\in N_{\infty_1}$. 取$\gamma_0=\gamma^{-1}\gamma'$，则$g=\gamma_0(n_1ak)$,其中$n_1ak\in\mathfrak{S}$。 ▎

设G_A的元g有 Iwasawa分解：

$$g=n\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}k,\quad n\in N_A,k\in K.$$

则取 $\alpha(g)=a_1a_2^{-1}$。让我们来考虑α的一些性质。

若 $x=(x_v)\in \mathbf{A},\omega=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，则 $\omega\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\omega^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -x & 1\end{pmatrix}$.

因为列式 $\left|\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=1$，对 $v|\infty$有Iwasawa分解

$$\begin{aligned}w\begin{pmatrix}1 & x_v\\ 0 & 1\end{pmatrix}w^{-1}=\begin{pmatrix}1 & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}(\sqrt{1+|x_v|^2})^{-1} & 0\\ 0 & \sqrt{1+|x_v|^2}\end{pmatrix}\\ &\times\begin{pmatrix}* & *\\ (\sqrt{1+|x_v|^2})^{-1} & -x_v(\sqrt{1+|x_v|^2})^{-1}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以$\left|\alpha\left(w\begin{pmatrix}1 & x_v\\0 & 1\end{pmatrix}w^{-1}\right)\right|_v=(1+|x_v|^2)^{-1}\leqslant 1$.

对$v<\infty$，若$x_v\in\mathcal{O}_{F_v}$，则$w\begin{pmatrix}1 & x_v\\0 & 1\end{pmatrix}w^{-1}\in K$. 故此

$$\left|\alpha\left(w\begin{pmatrix}1 & x_v\\0 & 1\end{pmatrix}w^{-1}\right)\right|_v=1.$$

对$v<\infty$若$x_v\overline{\in}\mathcal{O}_{F_v}$，则

$$w\begin{pmatrix}1 & x_v\\0 & 1\end{pmatrix}w^{-1}=\begin{pmatrix}1 & *\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x^{-1} & 0\\0 & -x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}* & *\\1 & -x^{-1}\end{pmatrix}.$$

故此

$$\left|\alpha\left(w\begin{pmatrix}1 & x_v\\0 & 1\end{pmatrix}w^{-1}\right)\right|_v=|x_v|^{-2}\leqslant 1.$$

所以对$n\in N_A$有$|\alpha(wnw^{-1})|_A\leqslant 1$.

另一方面，根据乘积公式，我们有

$$\left|\alpha\left(\begin{pmatrix}a_1 & x\\0 & a_2\end{pmatrix}\right)\right|_A=1.$$

故此，如果$b\in B_F$，则$|\alpha(b)|=1$.

引理1.5 如果$t>1$，$\gamma\in G_F$及$\mathfrak{S}_t\cap\gamma\mathfrak{S}_t\neq\varnothing$，则$\gamma\in B_F$.

证 取$g\in G_A$，$\gamma\in G_F$，使得$|\alpha(g)|>1$，$|\alpha(\gamma g)|>1$. 若$\gamma\overline{\in}B_F$，由 Bruhat 分解$G_F=B_F\cup B_FwN_F$，故$\gamma=bw\eta$，$b\in B_F$，$\eta\in N_F$. 取$g=nak$，那么，

$$|\alpha(g)|=|\alpha(a)|>1\Rightarrow|\alpha(waw^{-1})|=|\alpha(a)|^{-1}<1.$$

同时

$$|\alpha(\gamma g)=|\alpha(w\eta nw^{-1})||\alpha(waw^{-1})||\alpha(w)|<1.$$

与$|\alpha(\gamma g)|>1|$矛盾. 故必有$\gamma\in B_F$. ∎

关于Siegel集的其他性质可作同样证明，我们略去以下引理的证明.

引理1.6

(1) 已给Siegel集$\mathfrak{S}$. 则存在常数d，使得如果$\gamma\in G_F$，$g\in\mathfrak{S}$，则

$$|a(\gamma g)|\leqslant d|a(\gamma)|\cdot|a(g)|.$$

(2) 固定Siegel集$\mathfrak{S}$，正常数c。集合

$$\{\gamma\in G_F: \exists\, g\in\mathfrak{S}, \text{使} |a(\gamma g)|\geqslant c\}$$

在$B_F\backslash G_F$中的象是有限的。

(3) 设Ω为G_A的紧子集，c为正常数。集合

$$\{\gamma\in G_F: \forall\, g\in\Omega. |a(\gamma g)|\geqslant c\}$$

在$B_F\backslash G_F$中的象是有限的。

(4) 设Ω为G_A的紧子集. 存在常数d使得 $\forall\,\gamma\in G_F$，$g\in\Omega$有估计$|a(\gamma g)|\leqslant d$。

(5) 设Ω为G_A的紧子集，$g\in G_A$。存在常数c，使得$\forall\, h\in G_A$，有估计

$$\#\{\gamma\in G_F: \gamma^{-1}h\in g\Omega\}\leqslant c|a(g)|_A.$$

§2 自守形式

我们首先讨论$G_F\backslash G_A$上的函数的性质，然后研究自守形式.

2.1 有限函数

称定义在局部紧群H上的复值连续函数f为H有限，如果

$$\dim\sum_{h\in H}\boldsymbol{C}\rho(h)f<\infty,$$

其中$\rho(h)f(x)=f(xh), x\in H$。

引理2.1 设V是有限维向量空间，V的元是紧交换群H的连续函数. V在H的平移下不变，则V内的H的特征标生成V.

证 对任一点$x\in H$，可在V上定义线性泛函$f\mapsto f(x)$。因为除$f=0$外没有其他的f属于所有这样的线性泛函的核，所以H内

存在$x_1,\cdots,x_n$使得$e_{x_1},\cdots,e_{x_n}$为V的对偶空间的基.故此V有基$f_1,\cdots,f_n$，使得$f_i(x_j)=\delta_{ij}$。

据假设如果$f\in V,h\in H$，则$\rho(h)f\in V$。故此

$$\rho(h)f=\sum\tau_i(h)f_i.$$

所以

$$\rho(x_i)f(h)=f(x_ih)=\rho(h)f(x_i)=\tau_i(h).$$

由此可见$\tau_i\in V$为H上连续函数。

设$\rho(h)f_i=\sum\tau_{ij}(h)f_j$。从上面知道$\tau_{ij}(h)$是连续函数，所以$H$在$V$上的右平移作用是连续的。$H$是紧群。故此$V$是一维右平移不变子空间$V_i$的直和。显然可在每一个$V_i$中找出一个$H$的特征标。▎

引理2.2 紧交换群的特征标线性无关。

证 设H的特征标χ_i有线性关系

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_i=0,$$

则对$h,x\in H$，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_i(x)\chi_i(h)=0.$$

因为最少有两个系数不等于零，可设$a_1\neq0\neq a_2$。取x使得$\chi_1(x)\neq\chi_2(x)$,则从

$$\chi_1(x)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_i(h)\right)-\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_i(x)\chi_i(h)=0$$

得

$$\sum_{i=2}^{n}b_i\chi_i=0.$$

其中$b_2=\{\chi_1(x)-\chi_2(x)\}a_2\neq0$。故可用归纳法证明引理。▎

如同引理2.1，我们可以证明以下引理。

引理2.3 设V是有限维向量空间，V的元是局部紧交换群H的连续函数，V在H的平移作用下不变。则存在H的特征标$\chi_1,\cdots,\chi_r$及V的子空间$V_1,\cdots,V_r$，使得

$$V=\bigoplus_{i=1}^{r}V_i$$

和对任意$h\in H$，

$$\{\rho(h)-\chi_i(h)\}^{\dim V_i}$$

在V_i上是零映射。

引理2.4 设$H=\boldsymbol{Z}$或$\boldsymbol{R}$。以X记H的变量（即坐标函数）。则

$$\{\chi X^i:\chi\text{是}H\text{的特征标，}\ i\text{ 是非负整数}\}$$

是H有限连续函数所生成的向量空间的基。

证 （生成.）只要证明一个H有限连续函数f的平移所生成的有限维向量空间可由$\{\chi X^i\}$生成，故只需考虑这样的问题：已给特征标χ，V是有限维向量空间，V的元是H上的连续函数；V在H的平移下不变。对任意$h\in H$，$\{\rho(h)-\chi(h)\}^{\dim V}$是$V$上的零映射，则$V$的任一元均可表为$\chi$乘多项式。可以用$\chi^{-1}$乘$V$的每一个元，故可设$\chi=1$。于是只需证明：如果$\forall h\in H$，$\{\rho(h)-1\}^n f=0$，则$f$是次数不大于$n$的多项式。$n=1$时这是显然的。如果

$$\{\rho(h)-1\}^n f=0,$$

用归纳假设，知

$$\rho(h)f-f=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(h)X^i.$$

取n次多项式p，使得

$$\rho(1)p-p=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(1)X^i.$$

设$\tilde{f}=f-p$。则$\rho(1)\tilde{f}=\tilde{f}$。所以$\tilde{f}$有界。于是$\rho(h)\tilde{f}-\tilde{f}$是有界多项式，故为常数$c(h)$。而$c(h)$作为$H$的有界函数，还满足条件$c(h_1+h_2)=c(h_1)+c(h_2)$。所以$c(h)=0$。故知$\tilde{f}$是常数，即$f$是多项式。

（线性无关.）对H的特征标μ及非负整数n，作$V(\mu,n)$为由$\{\mu X^i:0\leqslant i\leqslant n\}$所生成的向量空间。显然对任一$h\in H$，$\{\rho(h)-\mu(h)\}^{n+1}$为$V(\mu,n)$上的零映射。若$\mu,\mu_1,\cdots,\mu_m$各不相同及

$$V=V(\mu,n)\cap\sum_{i=1}^{m}V(\mu_i,n_i)\neq\{0\}.$$

把V按引理2.3分解. 设

$$H_{ij}=\{h\in H:\mu_i(h)=\chi_j(h)\},$$

则H_{ij}为H的闭子群。 因为$\prod_{i=1}^{m}(\rho(h)-\mu_i(h))$在$V$上不可逆, 对任一$h\in H$必存在$i,j$, 使得$\mu_i(h)=\chi_j(h)$。故此 $H=\bigcup_{i,j}H_{i,j}$. 但H不可能是有限个真闭子群的并集, 故存在i, j,使得 $H=H_{i,j}$. 这便可证每一个 μ_i 等于一个 χ_j。同理亦知所有的$\chi_j(1\leqslant j\leqslant n)$都等于$\mu$. 这与假设矛盾.所以如有非平凡线性关系: $\sum b_i\chi_iX^i=0$, χ_i是H的特征标,则必有非平凡线性关系 $\sum_{i=0}^{n}a_i\mu X^i=0$。这说明多项式$\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$有无穷个零点。显然不可能。 ▎

我们可以把以上的结果用以下的引理合并起来。

引理2.5 设有集合$E_1,\cdots,E_n$。又设$\mathscr{F}_i$是一组E_i上的线性无关复值函数, $1\leqslant i\leqslant n$. 以$\prod f_i$记$E_1\times\cdots\times E_n$上的函数:

$$(\prod f_i)(x_1,\cdots,x_n)=\prod f_i(x_i),$$

其中$f_i\in\mathscr{F}_i,x_i\in E_i$。设$\mathscr{F}=\{\prod f_i:f_i\in\mathscr{F}_i\}$. 则$\mathscr{F}$是一组线性无关函数。

证 用归纳法. 如果

$$\sum_{f_1,\cdots,f_n}a(f_1,\cdots,f_n)f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\equiv0,$$

则

$$\sum_{f_n}\Big\{\sum_{f_1,\cdots,f_{n-1}}a(f_1,\cdots,f_n)f_1(x_1)\cdots f_{n-1}(x_{n-1})\Big\}f_n(x_n)\equiv0.$$

$\mathscr{F}_i$线性无关. 故此

$$\sum_{f_1,\cdots,f_{n-1}}a(f_1,\cdots,f_n)f_1(x_1)\cdots f_{n-1}(x_{n-1})\equiv0.\ ▎$$

引理2.6 设H_1和H_2是局部紧交换群。$H=H_1\times H_2$。如果f是H上有限连续函数。则存在H_1有限连续函数ϕ_i，和H_2上有限连续函数ψ_i，使得

$$f(x,y)=\sum_i \lambda_i\phi_i(x)\psi_i(y).$$

证 记f及其平移所生成的向量空间为V。在引理2.1的证明中可取$x_i\in H$和V的基$\{f_i\}$，使得$f_i(x_j)=\delta_{ij}$。设

$$V_1=\{H_1\xrightarrow{\phi}\mathbf{C}:\ \phi(x)=g(x,0),g\in V\}.$$

同样定义V_2。因为对$x\in H,\rho(x)f\in V$。所以

$$\rho(x)f=\sum_i \lambda_i(x)f_i.$$

因为$\lambda_i(x)=f(x+x_i)$，所以$\lambda_i\in V$.现在我们取$\phi_i(x)=\lambda_i(x,0)$，$\psi_i(y)=f_i(0,y)$。则

$$f(x,y)=\sum\phi_i(x)\psi_i(y). \quad \blacksquare$$

把$\mathbf{Z}^m\times\mathbf{R}^n$看成$\mathbf{R}^{m+n}$的子群。设$H_0$为拓扑群。在$H_0\times\mathbf{Z}^m\times\mathbf{R}^n$上有投射

$$\xi_i:(h_0,x_1,\cdots,x_{m+n})\mapsto x_i.$$

命题2.7 设H_0为紧交换群。则

$$\left\{\chi\prod_{i=1}^{m+n}\xi_i^{p_i}:\ \chi\text{为}H_0\text{特征标，}p_i\text{为非负整数}\right\}$$

是$H_0\times\mathbf{Z}^m\times\mathbf{R}^n$上有限连续函数所生成的向量空间的基。

容易从引理2.1至2.6推出以上的命题。

设Z是$G=\mathrm{GL}(2)$的中心。

引理2.8 如果ϕ是$G_F\backslash G_{\mathbf{A}}$上的连续函数，$\phi$是$Z_{\mathbf{A}}$有限. 则存在$F^\times\backslash\mathbf{A}^\times$的特征标，非负整数$m_j$和$G_F\backslash G_{\mathbf{A}}$上的连续函数$\phi_j$，使得对$\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}\in Z_{\mathbf{A}}$有

$$\rho\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}\right)\phi=\sum_j\chi_j(a)(\log|a|)^{m_j}\phi_j.$$

证　以V记由$\{\rho(a)\phi:a\in Z_A\}$所生成的向量空间。则按引理2.1，存在$a_1,\cdots,a_n\in Z_A$及V的基$\{\phi_1,\cdots,\phi_n\}$，使得$\phi_i(a_j)=\delta_{ij}$。这样

$$\rho(a)\phi=\sum_{i=1}^{n}\tau_i(a)\phi_i.$$

显然$\tau_i(a)=\phi(aa_i)$。故此τ_i是Z_A或$Z_F\backslash Z_A$上的有限连续函数。$\boldsymbol{Z}_F\backslash Z_A$与$F^\times\backslash\boldsymbol{A}^\times$同构。所以可用命题2.7，$\tau_i$是以下类型函数的线性组合。

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\right)\mapsto\chi(a)(\log|a|)^m,$$

其中χ是$F^\times\backslash\boldsymbol{A}^\times$特征标，$m$是非负整数。▌

2.2　光滑函数

我们称$G_F\backslash G_A$上的连续函数ϕ为**缓增函数**，如果对G_A的任一紧子集Ω，和任一常数$t>0$，存在常数c和N，使得对$g\in\Omega$, $a\in\boldsymbol{A}^\times,|a|\geqslant t$有

$$\left|\phi\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\right|\leqslant c|a|^{-N}.$$

我们称$G_F\backslash G_A$上的连续函数ϕ为**急减函数**，如果对G_A的任一紧子集Ω，任一常数$t>0$，和任一常数N，存在常数c_N，使得对$g\in\Omega,a\in\boldsymbol{A}^\times,|a|\geqslant t$有

$$\left|\phi\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\right|\leqslant c_N|a|^N.$$

对G_A的Siegel集$\mathfrak{S}$我们亦作这样的定义。称G_A上的函数ϕ为$\mathfrak{S}$上的缓增函数，如果存在常数c和N，使得对$g\in\mathfrak{S}$有

$$|\phi(g)|\leqslant ce^{-NH(g)}.$$

(在这里如果

$$g=n\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_1\end{pmatrix}$$

是 g 的 Iwasawa 分解：$G_A=N_AA_AK$，则取

$$e^{H(g)}=|a_1/a_2|_A.\ )$$

称 G_A 上的函数 ϕ 为$\mathfrak{S}$ 上急减函数，如果对每一常数N，存在常数 c_N，使得对 $g\in\mathfrak{S}$ 有

$$|\phi(g)|\leqslant c_N e^{NH(g)}.$$

群 G_A是G_∞和G_{A_f}的直积。我们称 G_A 上的复值函数 ϕ 为光滑函数，如果 ϕ 是连续函数，而且当我们把 ϕ 看成两个变元的函数 $\phi(x,y)$，$x\in G_\infty$，$y\in G_{A_f}$时，对固定的 y, $x\mapsto\phi(x,y)$是 G_∞ 上的光滑函数；对固定的 x, $y\mapsto\phi(x,y)$是 G_{A_f} 上的局部常值函数。

在 $G_R=GL(2,R)$的李代数 $\mathfrak{g}_R$上存在一个 G_R不变对称双线性型$\langle\cdot,\cdot\rangle$，对 $x\in\mathfrak{g}_R$，取$\|x\|=-\langle x,{}^tx^{-1}\rangle$。如果 $g=(\exp x)k$是 g 按 $G_R=(\exp\mathfrak{b})O(2)$的分解，则设 $\sigma(g)=\|x\|$。我们定义G_R 上的函数

$$\Xi(g)=\int_{O(2)}e^{-\frac{1}{2}H(gk)}\,dk,\quad g\in G_R.$$

则 ϕ 是 G_R上的光滑函数，$x\in\mathfrak{g}_R$。取

$$x\phi(g)=\frac{d}{dt}(\phi(g\exp tx))_{t=0},$$

$$\phi x(g)=\frac{d}{dt}(\phi(\exp tx\cdot g))_{t=0}.$$

以上的定义可以扩展到 $G_\infty=\prod_{v|\infty}GL(2,F_v)$(比如，可以利用Weil的限制纯量函子把$G_\infty$看作$R_{F/Q}\,G$)．称$G_\infty$的光滑函数 ϕ为Schwartz函数，如果对所有整数 $m\geqslant 0$，$X,Y\in\mathscr{U}(\mathfrak{g}_\infty)$($\mathfrak{g}_\infty$的通用包络代数)，有

$$\sup_{g\in G_\infty}|(1+\sigma(g))^m\Xi(g)^{-1}X\phi Y(g)|<\infty.$$

由Schwartz函数所生成的空间称为Schwartz空间$\mathscr{C}(G_\infty)$。

Schwartz-Bruhat 空间 $\mathscr{C}(G_A)$是指由满足以下条件的函数

$\phi:G_A\to\boldsymbol{C}$ 所生成的向量空间：

(1) $\phi=\phi_\infty\prod_{v<\infty}\phi_v$；

(2) $\phi_\infty\in\mathscr{C}(G_\infty)$；

(3) ϕ_v为G_v的局部常值函数($v<\infty$)；

(4) 除有限个 v 外，ϕ_v是$\mathrm{GL}(2,\mathscr{O}_v)$的特征函数。

2.3 自守形式

现在可以定义自守形式.

定义2.1 称连续函数 $\phi:G_A\to\boldsymbol{C}$**为自守形式**，如果

(1) 对$\gamma\in G_F$，$g\in G_A$有 $\phi(\gamma g)=\phi(g)$。

(2) ϕ 是右K有限。

(3) ϕ 是 Hecke 有限，即对$\mathscr{H}$的初等幂等元ξ，

$$\dim\sum_{f\in\mathscr{H}}\boldsymbol{C}\rho(\xi f)\phi<\infty.$$

(4) ϕ 是Z_A有限。

(5) ϕ 是缓增函数。

以上定义中各条件并不是互相无关的，不过我们不在此讨论了.

例子。记上半复平面为

$$\mathfrak{h}=\{z\in\boldsymbol{C}:\operatorname{im}z>0\}.$$

对整数 k 和复数 $s\in\boldsymbol{C}$，$z\in\mathfrak{h}$，取

$$E(z,s)=(\operatorname{Im}z)^s\sum{}'(mz+n)^{-k}|mz+n|^{-2s},$$

其中$\sum'$是对所有非零互素整数 m，n 求和。如果$\operatorname{Re}(k+2s)>2$，则 $z\mapsto E(z,s)$在 $\mathfrak{h}$ 的紧集上一致绝对收敛，因此定义了一个 $\mathfrak{h}$ 上的解析函数。

设 $\Gamma=\mathrm{SL}(a,\boldsymbol{Z})$。如果 $z\in\mathfrak{h}$ 和

$$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},$$

则设

$$\gamma z=\frac{az+b}{cz+d},\quad j(\gamma,z)=cz+d.$$

如果把 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 的元 g 写成

$$g=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{y} & 0\\ 0 & (\sqrt{y})^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

则 $gi=x+\mathrm{i}y$。利用上面的分解，下面的公式便让我们把 $E(z,\cdot)$ 看成 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$ 上的函数：

$$E(g,z)=(\sqrt{y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{k}E(x+\mathrm{i}y,s).$$

如果我们留意到

$$\gamma g=\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{y'} & 0\\ 0 & (\sqrt{y'})^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta(\gamma g) & \sin\theta(\gamma g)\\ -\sin\theta(\gamma g) & \cos\theta(\gamma g)\end{pmatrix},$$

其中

$$x'+\mathrm{i}y'=\gamma(x+\mathrm{i}y),$$

$$\theta(\gamma g)=\theta-\arg(j(\gamma,x+\mathrm{i}y)).$$

则只要把 $E(z,s)$ 写成

$$E(z,s)=\sum_{\Gamma\cap N\setminus\Gamma}\mathrm{Im}(\gamma z)^{s}j(\gamma,z)^{-k},$$

其中

$$N=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}:x\in\boldsymbol{R}\right\},$$

便立刻得到

$$E(g,s)=\sum_{\Gamma\cap N\setminus\Gamma}\exp\left[\left(s+\frac{k}{2}\right)H(\gamma g)+\mathrm{i}k\theta(\gamma g)\right],$$

$$\mathrm{Re}(k+2s)>2.$$

设 $G=\mathrm{GL}(2)/\boldsymbol{Q},\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})^{+}=\{g\in G_{\boldsymbol{R}}:\det g>0\}$,

$$K_{p}=\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{Z}_{p}),\quad K=\prod_{p<\infty}K_{p}.$$

则

$$G_{\boldsymbol{A}}=G_{\boldsymbol{Q}}\cdot\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})^{+}\cdot K.$$

把 G_A的元 g 按上式分解为

$$g=\gamma g_\infty\kappa.$$

按下式把 $E(\cdot,s)$看成 G_A 上的函数

$$E(g,s)=E(g_\infty,s).$$

因为

$$G_Q\cap GL(2,\boldsymbol{R})^+\cdot K=SL(2,\boldsymbol{Z}),$$

所以这样定义的 $E(\cdot,s)$是 $G_F\backslash G_A$ 上的函数。不难证明，这个函数 $E(\cdot,s)$是 G_A的自守形式。本例中的函数 E 一般都称为Eisenstein 级数。

定义2.2 设 ϕ 是 $G_F\backslash G_A$上的连续函数。取

$$\phi_B(g)=\int_{N_F\backslash N_A}\phi(ng)\mathrm{d}n,\quad g\in G_A.$$

称 ϕ_B 为 ϕ 的**常数项**。

引理2.9 如果 ϕ 是 G_A 的自守形式，则在任一 Siegel 集上 $\phi-\phi_B$是急减函数。

由 G_A的自守形式所生成的向量空间记为$\mathscr{A}$。G_A 的 Hecke 代数$\mathscr{H}$以右平移作用在$\mathscr{A}$上：$\phi\mapsto\rho(f)\phi$, $\phi\in\mathscr{A}$, $f\in\mathscr{H}$。常数项 $\phi_B=0$ 的自守形式 ϕ 称为**尖形式**。由尖形式所生成的空间记为 $\mathscr{A}_0$，而且 $\rho(\mathscr{H})\mathscr{A}_0\subseteq\mathscr{A}_0$。我们说$\mathscr{H}$的不可约可容许表示 π 是 ρ 的**子商**，如果存在$\mathscr{A}$的 ρ 不变子空间 U,V，使得$U\supset V$及 ρ 在商空间U/V上的表示等价于 π。同样定义 $\rho|_{\mathscr{A}_0}$的子商。

余下来本节将用几个引理来证明以下定理。

定理2.10 如果$\mathscr{H}$的不可约可容许表示 $\pi=\otimes\pi_v$ 是$(\rho,\mathscr{A})$的子商但不是$(\rho,\mathscr{A}_0)$的子商，则存在 $F^\times\backslash\boldsymbol{A}^\times$的特征标 μ,ν，使得对所有赋值 v，表示 π_v 是 $\rho(\mu_v,\nu_v)$的子商，其中 $\mu_v=\mu|_{F_v^\times}$, $\nu_v=\nu|_{F_v^\times}$。

定义2.3 对 G_A的函数 ϕ 考虑以下的条件：

（1）如果对 $x\in\boldsymbol{A}$，及 $a,b\in F^\times$，有

$$\phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)=\phi(g)$$

和

$$\phi\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}g\right)=\phi(g).$$

(故此可以把 ϕ 看成 $N_{\mathbf{A}}A_F\backslash G_{\mathbf{A}}$的函数。)

(2) ϕ 是右 K 有限。

(3) ϕ 是 Hecke有限。

(4) ϕ 是左 $A_{\mathbf{A}}$有限。

(5) 已给非负整数M和以 $F^\times\backslash\mathbf{A}^\times$的特征标对$(\mu,\nu)$为元的有限集$S$，如果 $a_1,a_2\in F^\times\backslash\mathbf{A}^\times$，则

$$\phi\left(\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}g\right)=\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{1}{2}}\sum_{\substack{(\mu,\nu)\in S\\ m+n<M}}(\mu(a_1)\nu(a_2)(\log|a_1|)^m \times(\log|a_2|)^n\phi_{m,n,\mu,\nu}(g)),$$

其中 $\phi_{m,n,\mu,\nu}$满足条件(1)和(2)。

由满足条件(1)至(4)的函数所生成的空间记为$\mathscr{I}$。由满足条件(1),(2)和(5)的函数所生成的空间记为$\mathscr{I}(S,M)$。如果S只有一元(μ,ν)，则记$\mathscr{I}(S,M)$为$\mathscr{I}(\mu,\nu,M)$。取

$$\mathscr{I}(\mu,\nu,\infty)=\bigcup_{M>0}\mathscr{I}(\mu,\nu,M)\ 及\ \mathscr{I}(\mu,\nu)=\mathscr{I}(\mu,\nu,0).$$

Hecke 代数$\mathscr{H}$以右平移ρ作用在以上各空间。

以上定义中各条件并非互相无关。如果函数 ϕ 满足(1)和(2)，则(3)及(4)是等价的。另一方面，如果 ϕ 满足(4)，则据命题2.7知有 S, M, 使得 ϕ 满足(5)，还可以证明

$$\mathscr{I}(S,M)=\bigoplus_{(\mu,\nu)\in S}\mathscr{I}(\mu,\nu,M).$$

先证一个一般性的引理。

引理2.11 设代数H有不可约表示π是H的表示ρ的子商，

而

$$\rho=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\rho_\lambda,$$

则有λ使得π是ρ_λ的子商。

证　设$(\rho,X)=\bigoplus_\lambda(\rho_\lambda,X_\lambda)$. 又设$\pi$与$X$的子商$Y_1/Y_2$等价。$\Lambda$中存在有限子集$\Lambda_0$，使得

$$Y_1\cap\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_0}X_\lambda\right)\not\subset Y_2.$$

于是可以用

$$Y_1\cap\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_0}X_\lambda\right)\quad 及\quad Y_2\cap\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_0}X_\lambda\right)$$

分别代替Y_1,Y_2，即是可以假设Λ是有限集$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$。若$n=1$，则证毕。否则用归纳法完成证明。可设$n=2$，如果$Y_1\cap X_{\lambda_1}\neq Y_2\cap X_{\lambda_2}$，则以$Y_1\cap X_{\lambda_1},Y_2\cap X_{\lambda_1}$代替$Y_1,Y_2$，便立刻看见$\pi$是$\rho_{\lambda_1}$的子商。否则$Y_1=Y_2+(Y_1\cap X_{\lambda_2})$。我们便以$Y_1\cap X_{\lambda_2}$，$Y_2\cap X_{\lambda_2}$代替$Y_0,Y_2$，便得$\pi$是$\rho_{\lambda_2}$的子商。▍

现在开始定理2.10的证明。

引理2.12　如果不可约可容许表示π是$\mathscr{A}$但不是$\mathscr{A}_0$的子商，则π是$\mathscr{I}$的子商。

证　据定义有正合序列

$$0\longrightarrow\mathscr{A}_0\longrightarrow\mathscr{A}\xrightarrow{c}\mathscr{I},$$

其中$c(\phi)=\phi_B$是ϕ的常数项，c是$\mathscr{H}$同态。设π与$\mathscr{A}$的子商U/V等价。取$U_0=cU,V_0=cV$。这样如果$U_0\neq V_0$，则π与U_0/V_0等价，即π是$\mathscr{I}$的子商。否则，从$U_0=V_0$得知，

$$U=V+(U\cap\mathscr{A}_0).$$

于是π与$U\cap\mathscr{A}_0/V\cap\mathscr{A}_0$等价。这与$\pi$不是$\mathscr{A}_0$的子商矛盾。▍

引理2.13　如果不可约可容许表示π是$\mathscr{I}$的子商，则存在特征标μ,ν及非负整数M，使得π是$\mathscr{I}(\mu,\nu,M)$的子商。

证　设π与$\mathscr{I}$的子商U/V等价。选取S和M，使得

$$U\cap\mathscr{I}(S,M)\neq V\cap\mathscr{I}(S,M).$$

于是π在

$$U\cap\mathscr{I}(S,M)/V\cap\mathscr{I}(S,M)$$

中出现，故此可以假设

$$U\subset\mathscr{I}(S,M)=\bigoplus_{(\mu,\nu)\in S}\mathscr{I}(\mu,\nu,M).$$

这样本引理便可从引理 2.11 推出。∎

引理2.14 如果不可约可容许表示π是$\mathscr{I}(\mu,\nu,M)$的子商，则π是$\mathscr{I}(\mu,\nu)$的子商。

证 利用定义 2.3 的条件(5)来展开

$$\phi\left(\begin{pmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&0\\0&b_2\end{pmatrix}g\right)\in\mathscr{I}(\mu,\nu,M)$$

为

$$\left|\frac{a_1}{a_2}\right|^{\frac{1}{2}}\mu(a_1)\nu(a_2)\sum_{m+n<M}\left((\log|a_1|)^m(\log|a_2|)^n\right.$$
$$\left.\times\phi_{m,n}\left(\begin{pmatrix}b_1&0\\0&b_2\end{pmatrix}g\right)\right)$$

或为

$$\left|\frac{a_1b_1}{a_2b_2}\right|^{\frac{1}{2}}\mu(a_1b_1)\nu(a_2b_2)\sum_{m+n<M}((\log|a_1|+\log|b_1|)^m$$
$$\times(\log|a_2|+\log|b_2|)^n\phi_{m,n}(g)).$$

比较系数便知，如果$m+n=M$，则

$$\phi_{m,n}\left(\begin{pmatrix}b_1&0\\0&b_2\end{pmatrix}g\right)=\left|\frac{b_1}{b_2}\right|^{\frac{1}{2}}\mu(b_1)\nu(b_2)\phi_{m,n}(g),$$

即$\phi_{m,n}\in\mathscr{I}(\mu,\nu)$。考虑映射

$$P_M:\mathscr{I}(\mu,\nu,M)\to\bigoplus_{m+n=M}\mathscr{I}(\mu,\nu):\phi\mapsto\bigoplus_{m+n=M}\phi_{m,n}.$$

设π是$\mathscr{I}(\mu,\nu,M)$的子商U/V，选最小的非负整数$N\leqslant M$，使

得$U\cap\mathscr{I}(\mu,\nu,N)\subsetneq V$，即$U=V+(U\cap\mathscr{I}(\mu,\nu,N))$。若$N=0$，引理得证。若$N>0$，则有正合序列

$$0\longrightarrow U\cap\mathscr{I}(\mu,\nu,N-1)\longrightarrow U\xrightarrow{P_N}\bigoplus_{m+n=N}\mathscr{I}(\mu,\nu).$$

因为$U\neq V+(U\cap\mathscr{I}(\mu,\nu,N-1))$，故此$\pi$是直和$\bigoplus\limits_{m+n=N}\mathscr{I}(\mu,\nu)$的子商。再利用引理2.11即可证明本引理。 ❙

引理2.15 如果$\mathscr{H}$的不可约可容许表示$\pi=\bigotimes\limits_v\pi_v$是$\mathscr{I}(\mu,\nu)$的子商，则对所有赋值$v$，$\pi_v$是$\rho(\mu_v,\nu_v)$的子商。

证 除有限个赋值v外，μ_v和ν_v在$\mathscr{O}_v^\times$上恒取值为1。故此唯一决定函数$\phi_v^0\in\mathscr{I}(\mu_v,\nu_v)$，使得$\phi_v^0(1)=1$及对所有$k_v\in K_v$有

$$\phi_v^0(g_vk_v)=\phi_v^0(g_v).$$

对这些函数作限制张量积

$$\bigotimes_{\phi_v^0}\mathscr{I}(\mu_v,\nu_v).$$

考虑线性映射

$$\bigotimes_{\phi_v^0}\mathscr{I}(\mu_v,\nu_v)\to\mathscr{I}(\mu,\nu):\otimes\phi_v\mapsto\phi,$$

其中$\phi(g)=\prod\limits_v\phi_v(g_v)$。显然以上映射的象是$\mathscr{I}(\mu,\nu)$。所以我们可以把$\pi$看成$\bigotimes\limits_v\rho(\mu_v,\nu_v)$的子商。

由于$\pi|_{\mathscr{H}_v}=\oplus\tilde{\pi}_\lambda$，其中所有的$\tilde{\pi}_\lambda$均与$\pi_v$等价，及

$$\otimes\rho(\mu_v,\nu_v)|_{\mathscr{H}_v}=\otimes\tilde{\rho}_\lambda,$$

其中所有的$\tilde{\rho}_\lambda$均与$\rho(\mu_v,\nu_v)$等价。所以π_v是$\pi|_{\mathscr{H}_v}$的子商，亦是$\rho|_{\mathscr{H}_v}$的子商。然后用引理2.11，便知π_v是$\rho(\mu_v,\nu_v)$的子商。 ❙

定理2.10可由引理2.12至2.15推出。

§3 尖 形 式

从上节定理2.10看到，不是尖形式的自守形式可以用诱导表示来研究，还可以证明这些诱导表示都可以写为Eisenstein级数的直积分。故此余下的比较难的问题是尖形式的构造。本节将介绍一类经典尖形式：$S_k(N,\psi)$。

取正整数N，k及$(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times$的(Dirichlet)酉特征标$\psi$。设

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z}): c\equiv 0(\mathrm{mod}N)\right\},$$

称函数$f:\mathfrak{h}\to\boldsymbol{C}$为权$=k$，级$=N$，特征标$=\psi$的**尖性模形式**，并记$f\in S_k(N,\psi)$，如果

(1) 对$z\in\mathfrak{h}$，$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$，有

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\psi(a)^{-1}(cz+d)^k f(z).$$

(2) f是$\mathfrak{h}$上的解析函数。

(3) 对任意的$d/c\in\boldsymbol{Q}$，$(c,d)=1$，函数f有展开式如下：

$$\psi(d)(cz+d)^k f(z)=\sum_{n\geq 1}a_n e^{2\pi i(az+b)/(cz+d)}$$

其中$a,b\in\boldsymbol{Z}$使得$ad-bc=1$，并且要求对

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

时亦成立。

以ψ_p记以下同态

$$\boldsymbol{Z}_p^\times\longrightarrow(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^\times\xrightarrow{\psi}\boldsymbol{C}^\times,$$

则$\prod_{p<\infty}\psi_p$定义$\prod_{p<\infty}\boldsymbol{Z}_p^\times$的特征标。因为

$$A^\times = Q^\times R_+^\times \prod_{p<\infty} Z_p^\times,$$

我们可以把$\prod\limits_{p<\infty}\psi_p$扩张为$A^\times$的特征标$\psi$，即$\psi$在$Q^\times R_+^\times$上等于1。

设$G=\mathrm{GL}(2)/\boldsymbol{Q}$. 取

$$K_p^N = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \boldsymbol{Z}_p) : c \equiv 0 (\mathrm{mod} N)\right\},$$

则

$$G_A = G_Q \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})^+ \prod_{p<\infty} K_p^N,$$

$$G_Q \cap \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{R})^+ \prod_{p<\infty} K_p^N = \Gamma_0(N).$$

对$f \in S_k(N, \psi)$用以下公式定义G_A上的函数:

$$\phi_f(g) = f(g_\infty \cdot i) j(g_\infty, i)^{-k} \psi(k)$$

其中$g=\gamma g_\infty k$，$\gamma \in G_Q$，$g_\infty \in \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})^+$, $k \in \prod K_p^N$, $k=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 取$\psi(k)$为$\psi(a)$，可以证明$\phi_f$是尖形式.

命题3.1 设ϕ_f按以上公式由$f \in S_k(N,\psi)$决定.

(1) 如果$\gamma \in G_Q$，则$\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$.

(2) 如果$k \in \prod K_p^N$，则$\phi_f(gk) = \phi_f(g)\psi(k)$.

(3) 如果$k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，则$\phi_f(gk_\theta) = e^{ik\theta}\phi_f(g)$.

(4) 设$K = O(2, \boldsymbol{R}) \prod\limits_{p<\infty} \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{Z}_p)$，则$\phi_f$是$K$有限的.

(5) 如果$z \in Z_A$，则$\phi_f(zg) = \phi_f(gz) = \psi(z)\phi_f(g)$.

(6) 如果把ϕ_f看作$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$的函数，则

$$\Delta\phi = -\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\phi,$$

其中 Δ 是 Laplace 算子。

(7) ϕ_f 是缓增函数：对任意常数 $t>0$ 和 G_A 的紧子集 ω，存在常数 c 和 N，使得对 $g\in\omega$，$a\in\boldsymbol{A}^\times$，$|a|\geqslant t$，有

$$\phi_f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}g\right)\leqslant c|a|^N.$$

(8) $$\int_{Q\setminus A}\phi_f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}g\right)\mathrm{d}x=0.$$

证　以 ϕ 记 ϕ_f。把 $g\in G_A$ 分解为 $g=\gamma_g\cdot g_\infty\cdot k_g$。

(1) 因为 $\gamma g=(\gamma\gamma_g)\cdot g_\infty\cdot k_g$，所以 $\phi(\gamma g)=\phi(g)$。

(2) 因为 $gk=\gamma_g\cdot g_\infty\cdot k_g k$，所以 $\phi(gk)=\phi(g)\psi(k)$。

(3) 因为 $gk_\theta=\gamma_g\cdot g_\infty k_\theta\cdot k_g$，所以

$$\phi(gk_\theta)=f(g_\infty k_\infty\cdot i)j(g_\infty k_\theta,i)^{-k}\psi(k_g).$$

利用

$$k_\theta\cdot i=i,\quad j(g_1,g_2,z)=j(g_1,g_2z)j(g_2,z)$$

和 $j(k_\theta,i)=\mathrm{e}^{-i\theta}$，便得

$$\phi(gk_\theta)=\phi(g)\mathrm{e}^{ik\theta}.$$

(4) 因为 $\left[K:\mathrm{SO}(2,\boldsymbol{R})\prod\limits_{p<\infty}K_p^N\right]<\infty$，所以 ϕ 是 K 有限。

(5) 设 $z=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$，$a=aa_\infty u\in\boldsymbol{Q}^\times\boldsymbol{R}_+^\times\prod\limits_{p<\infty}\boldsymbol{Z}_p^\times=\boldsymbol{A}^\times$，则

$$zg=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\gamma_g\cdot\begin{pmatrix} a_\infty & 0 \\ 0 & a_\infty \end{pmatrix}g_\infty\cdot\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}k_g.$$

于是

$$\phi(zg)=\phi(g)\psi(z).$$

(6) $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$的元 g 可按 Iwasawa 分解为

$$g=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & (\sqrt{y})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

如果把(x,y,θ)看作 g 的坐标，则 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{R})$的 Casimir 算子便是

Laplace 算子：

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-y\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}.$$

按定义 $\phi(y)=f(x+iy)e^{k/2}e^{-ik\theta}$。由于 f 是解析函数，故此

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f=0,\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)f=0.$$

所以

$$\Delta\phi=-\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\phi.$$

(7) 已知 f 在∞是解析函数，即如果 $f(z)=\tilde{f}(q),q=e^{2\pi iz}$，则 $\tilde{f}$ 在 $q=0$ 是解析函数，即存在 $R>0$, $c\geqslant 0$, 对$|q|\leqslant R$ 有 $|\tilde{f}(q)|\leqslant c$。所以

$$\left|\phi\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\right|=|\tilde{f}(e^{-2\pi a})|\leqslant c,$$

若 $a\geqslant 1/2\pi\log R$。

(8) 直接计算：

$$\int_{Q\setminus A}\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)dx=\int_{Z\setminus R}\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)dx$$

$$=\int_0^1 f(x+i)dx=0. \quad \blacksquare$$

下一步讨论 Hecke 算子。若

$$g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in GL(2,\boldsymbol{R}^+),$$

$f\in S_k(N,\psi)$。设

$$f|_{[g]}(z)=f(gz)((cz+d)(\det g)^{-1/2})^{-k},$$

则

$$f|_{[g]}(z)=\psi(a)^{-1}f(z).$$

把双陪集分解成左陪集：p 是素数，

$$\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\Gamma_0(N)=\bigcup_j \Gamma_0(N)\gamma_j$$

$$=\bigcup_{\substack{a>0\\ ad=p}}\ \bigcup_{0<b<d-1}\ \Gamma_0(N)\sigma_a\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}.$$

其中 σ_a 是这样定义的：找 $\gamma\equiv 1(\mathrm{modN})$，使得

$$\gamma\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{Z}),$$

σ_a 便是 $\gamma\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$。请留意陪集 $\Gamma_0(N)\sigma_a$ 是由 a 决定的。

经典的 Hecke 算子 $T(p)$是这样定义的：

$$T(p)f=p^{\frac{k}{2}-1}\sum_j f\Big|_{[\gamma_j]}$$

$$=p^{k-1}\sum_{\substack{a>0\\ ad=p}}\ \sum_{b=0}^{d-1}\psi(a)f\left(\frac{az+b}{d}\right)d^{-k}.$$

设 $p\nmid N$。则 $K_p^N=K_p=\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{Z}_p)$。设

$$H_p=K_p\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}K_p,$$

以 χ_p 记 H_p 的特征函数。对 G_A/K_p 上的函数 ϕ，定义 Hecke 算子 $\tilde{T}(p)$如下：

$$\tilde{T}(p)\phi(g)=\phi*\chi_p(g)=\int_{H_p}\phi(gh)dh.$$

引理3.2 如果 $f\in S_k(\Gamma_0(N),1)$，则

$$p^{\frac{k}{2}-1}\tilde{T}(p)\phi_f=\phi_{T(p)f}.$$

证 把双陪集 H_p 分解为右 K_p 陪集：

$$H_p=\bigcup_{b=0}^{p-1}\begin{pmatrix}p & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}K_p\cup\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}K_p.$$

所以

$$\tilde{T}(p)\phi(g)=\sum_{b=0}^{p-1}\phi\left(g\begin{pmatrix}p & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)+\phi\left(g\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\right)$$

（在这里我们在 $GL(2,\mathbf{Q}_p)$ 上取 Haar 测度，使得 $\mathrm{vol}(K_p)=1$）。

把 $G_{\mathbf{A}}$ 的元 g 分解为 $g=\gamma g_\infty k$，则

$$g_\infty k\begin{pmatrix}p & -b\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\gamma'\begin{pmatrix}p^{-1} & bp^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_\infty \mathbf{k}',$$

$$\gamma'=\left(\begin{pmatrix}p & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\cdots\right),$$

$$\mathbf{k}'=\mathbf{k}\left(1,\begin{pmatrix}p & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1},\begin{pmatrix}p & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1},\cdots,\underset{\text{第}p\text{位}}{1},\begin{pmatrix}p & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1},\cdots\right).$$

所以

$$\phi_f\left(g\begin{pmatrix}p & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}p & -b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}z\right)p^{-k/2}=f\left(\frac{z+b}{p}\right)p^{-k/2}.$$

同样可得

$$\phi_f\left(g\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}^{-1}z\right)=f(pz)p^{k/2}.$$

所以

$$p^{\frac{k}{2}-1}\tilde{T}(p)\phi_f(g)=p^{-1}\sum_{b=}^{p-1}f\left(\frac{z+b}{p}\right)+p^{k-1}f(pz)$$

$$=p^{k-1}\sum_{\substack{a>0\\ ad=p}}\sum_{b=0}^{d-1}f\left(\frac{az+b}{d}\right)d^{-k}=\phi_{T(p)f}(g). \quad \blacksquare$$

取 $f\in S_k(N,\psi)$，$G_{\mathbf{A}}$ 在 $\{\rho(g)\phi_f : g\in G_{\mathbf{A}}\}$ 生成的空间上的右平移作用所决定的表示记为 π_f。我们可以证明：如果对所有的 $p\nmid N$，f 是 $T(p)$ 的特征函数，则 π_f 是不可约表示。以 ρ_0 记 $G_{\mathbf{A}}$ 在 $G_{\mathbf{A}}$ 的尖形式空间的右正则表示，设 π 是 ρ_0 的不可约子表示而且有 $\mathbf{R}_+^\times\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times$ 的酉特征标 ψ，使得 $\pi|_{Z_{\mathbf{A}}}=\psi$，则有正整数 N 及 $f\in S_k(N,\psi)$，使得 $\pi=\pi_f$。关于这些结果可看 Gelbart[1] 定理 5.19。

第五章 Eisenstein级数

本章讨论 GL(2)上 Eisenstein 级数的解析延拓及函数方程理论，这些定理在 SL(2, $\boldsymbol{R}$)的情形首先由 Selberg 证明(但从未发表)。Langlands[1]给出任意实李群的 Eisenstein 级数理论的详细证明。我们在这里将讨论 Adele 环上的 Eisenstein 级数。

§1 基本性质

设F为代数数域。$\boldsymbol{A}$为F的 Adele 环。

以G记 GL(2)。以Z记G的中心子群。以A记2×2对角矩阵群，A的(代数)特征标在Q上所生成的向量空间记为$X(A)_Q$.对$a=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\in A$，设$\alpha(a)=a_1a_2^{-1}$。则单根$\alpha$为$X(A)_Q$的元，常以$\rho$记$\alpha/2$。设$\mathfrak{a}=\mathrm{Hom}(X(A)_Q,\boldsymbol{R})$，及$\mathfrak{a}^*=X(A)_Q\otimes\boldsymbol{R}$。若$H\in\mathfrak{a},\chi\in\mathfrak{a}^*$，则以$\langle H,\chi\rangle$记$H(\chi)$。若$a\in A_A$，取$H(a)\in\mathfrak{a}$，使得$\forall\chi\in\mathfrak{a}^*$有

$$e^{\langle H(a),\chi\rangle}=|\chi(a)|_A.$$

则有同态$H:A_A\to\mathfrak{a}$。设$A_A^1=\ker H$，以A_∞^0记$\prod_{v|\infty}A_{F_v}$的单位元连通分支。则有直积

$$A_A=A_A^1\times A_\infty^0,$$

而且$A_F\backslash A_A^1$是紧集。

取$g\in G_A$。若对 Iwasawa 分解$G_A=N_A A_A K$，g写为$g=nak$，则以$H(g)$记这分解中的a。

定义1.1 设$\Phi\in C^\infty(N_A A_F A_\infty^0\backslash G_A)$，并且

$$\int_{A_F\backslash A_A^1\times K} |\Phi(ak)|^2 \mathrm{d}a\mathrm{d}k<\infty,$$

则定义 Φ 的Eisenstein 级数如下：

$$E(g,\Phi,z) = \sum_{\gamma\in B_F\backslash G_F} e^{\langle H(\gamma g), z\alpha+\rho\rangle}\Phi(\gamma g),$$

其中 $g\in G_A$，$z\in \mathbf{C}$。

引理1.1 设$\mathscr{U}=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Re}z>1/2\}$. 定义1.1中的 Eisenstein 级数 $E(g,\Phi,z)$在 $G_A\times\mathscr{U}$ 的紧子集上绝对一致收敛。对任一 Siegel 集 $\mathfrak{S}$，存在$\mathscr{U}$的局部有界函数 c, $c(z)$由 Re z 所决定，而且，对 $g\in\mathfrak{S}$，有估计

$$|E(g,\Phi,z)|\leqslant c(z)e^{\langle H(g),(\mathrm{Re}z)\alpha+\rho\rangle}.$$

证 显然

$$|E(g,\Phi,z)|\leqslant\sum_{\gamma\in B_F\backslash G_F} e^{\langle H(\gamma g),(\mathrm{Re}z)\alpha+\rho\rangle}|\Phi(\gamma g)|.$$

所以可假设 $z\in\mathbf{R}$。我们只要证明右边级数在 $\mathscr{U}\times G_A$ 的紧子集上一致收敛。若C是 G_A 的紧子集，则有常数 ν，使得，对所有 $\gamma\in G_F$，$g\in C$，有

$$\langle H(\gamma g),\alpha\rangle\leqslant\nu.$$

若 C_1 是$\mathscr{U}$的紧子集，则有 $z_0\in\mathbf{R}$，使得对所有 $z\in C_1$有 $z_0\geqslant\mathrm{Re}z$。这样对 $z\in C_1$，$g\in C$，我们便有

$$|e^{\langle H(\gamma g),z\alpha+\rho\rangle}|\leqslant 常数\ e^{\langle H(\gamma g),z_0\alpha+\rho\rangle}.$$

所以我们可以固定 z_0，只要考虑的级数对 G_A 的紧子集一致收敛。

现在我们引用一个表示论的结果(Harish-Chandra[1])：存在 $f_0\in C_c^\infty(G_A)$，使得对所有 $g\in G_A$，$k\in K$，有 $f_0(kgk^{-1})=f_0(g)$，而且还有

$$e^{\langle H(g),z_0\alpha+\rho\rangle}\Phi(g)=\int_{G_A} e^{\langle H(gh),z_0\alpha+\rho\rangle}\Phi(gh)f_0(h)\mathrm{d}h.$$

于是我们便有估计

$$|E(g,\Phi,z_0)|\leqslant\sum_{B_F\backslash G_F}\int_{G_A}(|e^{\langle H(h),z_0\alpha+\rho\rangle}\Phi(h)|$$
$$\times|f_0(g^{-1}\gamma^{-1}h)|)\mathrm{d}h.$$

以 C_2 为 f_0 的支集．以上不等式右边可写为

$$\int_{B_F\backslash G_A}|e^{\langle H(h),z_0\alpha+\rho\rangle}\Phi(h)|\left\{\sum_{G_F}|f_0(g^{-1}\gamma^{-1}h)|\right\}\mathrm{d}h.$$

以 $C(g)$ 记 G_FgC_2 投射在 $N_AA_F\backslash G_A$ 上的象．由约化理论知有常数 c_2，使得对所有 $h\in G_A$，有估计

$$\#\{\gamma:\gamma^{-1}h\in gc_2\}\leqslant c_2e^{\langle H(g),2\rho\rangle}.$$

所以有常数 c_1，使得对 g 在 Siegel 集 $\mathfrak{S}$ 中有

$$|E(g,\Phi,z_0)|$$
$$\leqslant c_1e^{\langle H(g),2\rho\rangle}\int_{C(g)}|e^{\langle H(h),z_0\alpha+\rho\rangle}\Phi(h)|\mathrm{d}h.$$

因为存在常数 μ，使得

$$G_Fgc_2\subseteq\{h:\langle H(h)-H(g),\alpha\rangle\leqslant\mu\}.$$

所以利用积分公式

$$\int_{G_A}\phi(g)\mathrm{d}g=\int_{N_A}\int_{A_A}\int_K\phi(nak)e^{-\langle H(a),2\rho\rangle}\,\mathrm{d}n\mathrm{d}a\mathrm{d}k,$$

便知上式中在 $C(g)$ 上的积分不能大于

$$e^{\langle H(g),z_0\alpha-\rho\rangle}\left(\int_{-\infty}^{\mu}e^{t(z_0-\frac{1}{2})}\,\mathrm{d}t\right)^{r_2}$$
$$\times\int_{A_F\backslash A_A^1\times K}\Phi(ak)\mathrm{d}a\mathrm{d}k$$
$$\leqslant\text{常数}\ e^{\langle H(g),z_0\alpha-\rho\rangle}e^{\mu(z_0-\frac{1}{2})}\left(z_0-\frac{1}{2}\right)^{-1}$$
$$\times\mathrm{vol}(A_F\backslash A_A^1)\mathrm{vol}(K)\|\Phi\|,$$

若 $z_0>1/2$．证毕．▎

为了进一步研究 Eisenstein 级数，必需引入 $E(g,\Phi,z)$ 的常数项 $E_B(g,\Phi,z)$ 如下：

$$E_B(g,\Phi,z)=\int_{N_F\backslash N_A} E(ng,\Phi,z)\mathrm{d}n.$$

在上面的积分中代入 E 的定义，并利用 G_F 的Bruhat分解，此积分化为

$$\int_{N_F\backslash N_A} \mathrm{e}^{\langle H(ng),\, z\alpha+\rho\rangle}\Phi(ng)\mathrm{d}n$$

$$+\int_{N_F\backslash N_A}\sum_{N_F}\mathrm{e}^{\langle H(w\gamma ng),\, z\alpha+\rho\rangle}\Phi(w\gamma ng)\mathrm{d}n.$$

其中

$$w=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

选取测度 $\mathrm{d}n$，使得 $\mathrm{vol}(N_F\backslash N_A)=1$。对 $\mathrm{Re}z>1/2$，设

$$(M(z)\Phi)(g)=\mathrm{e}^{\langle H(g),\, z\alpha-\rho\rangle}$$

$$\times\int_{N_A}\Phi(wng)\mathrm{e}^{\langle H(wng),\, z\alpha+\rho\rangle}\mathrm{d}n.$$

则我们便得公式

$$E_B(g,\Phi,z)=\mathrm{e}^{\langle H(g),\, z\alpha+\rho\rangle}\Phi(g)$$

$$+\mathrm{e}^{\langle H(g),\, -z\alpha+\rho\rangle}M(z)\Phi(g).$$

本章的目的是证明以下定理。

定理1.2 $M(z)$ 在复平面上只有单极点。对满足定义1.1的函数 Φ 及 $g\in G_A$，$z\mapsto E(g,\Phi,z)$ 可以解析延拓为复平面上的亚纯函数。我们还有下面的函数方程

$$M(z)M(-z)\Phi=\Phi,$$

$$E(g,M(z)\Phi,-z)=E(g,\Phi,z).$$

我们把证明分为八步。

(1) $M(z)$ 是 $\{z:\mathrm{Re}z>0,\ z\notin(0,1/2]\}$ 上的解析函数(引理

1.4)。

(2) $E(g,\Phi,z)$是$\{z:\mathrm{Re}z>0,z\overline{\in}(0,1/2]\}$上的解析函数(引理2.4)。

(3) 除了区间$(0,1/2]$中的有限个点外，$M(z)$是$\{z:\mathrm{Re}z>0\}$上的解析函数(引理3.3)。

(4) 除了区间$(0,1/2]$中的有限个点外，$E(g,\Phi,z)$是$\{z:\mathrm{Re}z>0\}$上的解析函数(引理3.5)。

(5) 除$[-1/2,1/2]$中有限个点$0,\pm z_1,\cdots,\pm z_n$外，$M(z)$是解析函数(引理4.1)。

(6) 除$[-1/2,1/2]$中有限个点$0,\pm z_1,\cdots,\pm z_n$外，$E(g,\Phi,z)$是解析函数(引理4.2)。

(7) $M(z)$及$E(g,\Phi,z)$在$\pm z_1,\cdots,\pm z_n$只有单极点(引理4.3)。

(8) 0是$M(z)$及$E(g,\Phi,z)$的可去奇点(引理4.4)。

我们的证明是根据Langlands[2]。

在未展开证明之前先引入一些常用的记号。

若Φ,Ψ满足定义1.1的条件，设

$$(\Phi,\Psi)=\int_{A_F\backslash A_{\mathbb{A}}^1\times K}\Phi(ak)\overline{\Psi}(ak)\mathrm{d}a\mathrm{d}k.$$

在复平面上引进柱集：

$$D(R)=\{z\in\mathbf{C}:|\mathrm{Re}\,z|<R\}.$$

其中实数$R>1/4$。考虑定义在$D(R)\times G_{\mathbb{A}}$上的二元函数$\Phi(z,g)$。对$\forall z\in D(R)$，我们要求函数$g\mapsto\Phi(z,g)$满足定义1.1中的条件；对$\forall g\in G_{\mathbb{A}}$我们要求$z\mapsto\Phi(z,g)$是解析函数，并且对任一多项式$p$，我们要求$\|p(\mathrm{Im}\,z)\Phi(z)\|$有界。满足这些条件的函数所组成的集合记为$\mathfrak{M}(R)$。对$\Phi\in\mathfrak{M}(R)$，设

$$\phi(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}z=\varepsilon}e^{\langle H(g),\,z\alpha+\rho\rangle}\Phi(z,g)|\mathrm{d}z|,$$

其中 c 是一个充分大的实数。（以上是一个Fourier 反演公式。）所谓$\phi(z)$的不完全θ级数是指

$$\phi^\wedge(g)=\sum_{\gamma\in B_F\backslash G_F}\phi(\gamma g).$$

显然

$$\phi^\wedge(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}\,z=c}E(g,\Phi(z),z)\,|dz|.$$

对$\Phi,\Psi\in\mathfrak{M}(R)$及 $c>1/4$，设

$$[\Phi(\cdot),\Psi(\cdot)]=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}\,z=c}[(\Phi(z),\Psi(-\bar{z}))$$
$$+(M(z)\Phi(z),\Psi(\bar{z}))]\,|\mathrm{d}z|.$$

引理1.3 对$\Phi,\Psi\in\mathfrak{M}(R)$及 $c>1/4$，设

$$\phi(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}\,z=c}\mathrm{e}^{\langle H(g),\,z\alpha+\rho\rangle}\Phi(z,g)\,|\mathrm{d}z|,$$

$$\psi(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}\,z=c}\mathrm{e}^{\langle H(g),\,z\alpha+\rho\rangle}\Psi(z,g)\,|\mathrm{d}z|.$$

则

$$\int_{G_F\backslash G_A}\phi^\wedge(g)\bar{\psi}^\wedge(g)\mathrm{d}g=[\Phi(\cdot),\Psi(\cdot)].$$

证 我们直接计算，

$$\int_{G_F\backslash G_A}\phi^\wedge(g)\bar{\psi}^\wedge(g)\mathrm{d}g=\int_{G_F\backslash G_A}\phi^\wedge(g)\sum_{B_F\backslash G_F}\bar{\psi}(\gamma g)\mathrm{d}g$$

$$=\int_{G_F\backslash G_A}\sum_{B_F\backslash G_F}\phi^\wedge(\gamma g)\bar{\psi}(\gamma g)\mathrm{d}g$$

$$=\int_{B_F\backslash G_A}\phi^\wedge(g)\bar{\psi}(g)\mathrm{d}g$$

$$=\int_{B_FN_A\backslash G_A}\mathrm{d}g\int_{N_F\backslash N_A}\phi^\wedge(ng)\bar{\psi}(g)\mathrm{d}n$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{Re}\, z = c} \mathrm{d}z \int_{B_F N_A \setminus G_A} E_B(g, \Phi(z), z) \bar{\psi}(g) \mathrm{d}g.$$

代入常数项E_B及ψ的公式，利用

$$\mathrm{d}g = \mathrm{e}^{\langle H(g), -2\rho \rangle} \mathrm{d}n \mathrm{d}a \mathrm{d}k$$

及公式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{Re}\, z = c} |\mathrm{d}z| \int_{A_\infty^0} f(a) |a|^{-z} \mathrm{d}a = f(1),$$

引理便得证。

如果f是$D(R)$上的有界全纯函数，$\Phi \in \mathfrak{M}(R)$，则$f \cdot \Phi \in \mathfrak{M}(R)$。

若$f(-z) = f(z)$，设$f^*(z) = \bar{f}(-\bar{z})$，则

$$[f(\cdot)\Phi(\cdot), \Psi(\cdot)] = [\Phi(\cdot), f^*(\cdot)\Psi(\cdot)].$$

事实上我们有

$$[f(\cdot)\Phi(\cdot), \Psi(\cdot)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{Re}\, z = c} [(f(z)\Phi(z), \Psi(-\bar{z})) + (M(z) f(z) \Phi(z), \Psi(\bar{z}))] |\mathrm{d}z|.$$

显然

$$(f(z)\Phi(z), \Psi(-\bar{z})) = (\Phi(z), \bar{f}(z)\Psi(-\bar{z})) = (\Phi(z), f^*(-\bar{z})\Psi(-\bar{z}))$$

及

$$(M(z) f(z) \Phi(z), \Psi(\bar{z})) = (f(z) M(z) \Phi(z), \Psi(\bar{z})) = (M(z)\Phi(z), f^*(\bar{z})\Psi(\bar{z})).$$

于是所需公式便立刻得证。 ▎

从上面的结果可以得知$[f^*(\cdot) f(\cdot)\Phi(\cdot), \Psi(\cdot)]$是$\mathfrak{M}$上的正定Hermite 型。设对$z \in D(R)$，$|f(z)| < k$及

$$g(z) = (k^2 - f^*(z) f(z))^{1/2},$$

因为对$z \in D(R)$，$k^2 - f^*(z) f(z) \neq 0$，故$g(z)$是$D(R)$上有界全纯函数，而且$g^*(z) = g(z)$及（对适当选取的平方根）$g(-z) =$

$g(z)$。因为

$$g^*(z)g(z)=k^2-f^*(z)f(z),$$

故

$$\begin{aligned}0&\leqslant[g(\cdot)\Phi(\cdot),g(\cdot)\Phi(\cdot)]\\&=[\Phi(\cdot),k^2-f^*(\cdot)f(\cdot)\Phi(\cdot)]\\&=k^2[\Phi(\cdot),\Phi(\cdot)]-[f(\cdot)\Phi(\cdot),f(\cdot)\Phi(\cdot)].\end{aligned}$$

所以

$$[f(\cdot)\Phi(\cdot),f(\cdot)\Phi(\cdot)]\leqslant k^2[\Phi(\cdot),\Phi(\cdot)].$$

以$\mathscr{L}(\{B\})$记由所有$\phi^\wedge$所生成的$L^2(G_P\backslash G_A)$的闭子空间。设$\mathfrak{M}=\bigcup\mathfrak{M}(R)$。对$\Phi\in\mathfrak{M}$，记$\mathscr{T}(\Phi)=\phi^\wedge$。则$(\phi^\wedge,\psi^\wedge)$是$\mathscr{L}(\{B\})$的内积，因为$(\phi^\wedge,\psi^\wedge)=[\Phi(\cdot),\Psi(\cdot)]$，所以存在有界算子$\mathfrak{T}(f)$：$\mathscr{L}(\{B\})\to\mathscr{L}(\{B\})$。于是有下图

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}(R)&\longrightarrow&\mathscr{L}(\{B\})\\ {\scriptstyle f\times}\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{T}(f)}\\ \mathfrak{M}(R)&\longrightarrow&\mathscr{L}(\{B\})\end{array}$$

作计算

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}(f)\phi^\wedge,\mathfrak{T}(f)\phi^\wedge)&=[f(\cdot)\Phi(\cdot),f(\cdot)\Phi(\cdot)]\\&\leqslant k^2[\Phi(\cdot),\Phi(\cdot)]=k^2(\phi^\wedge,\phi^\wedge),\end{aligned}$$

便知

$$\|\mathfrak{T}(f)\|\leqslant\sup_{z\in D(B)}|f(z)|.$$

设$S(f)=\{f(z):z\in D(R)\}$在$\mathbf{C}$内的闭包。则$\mathfrak{T}(f)$的谱是$S(f)$的子集。事实上，$\mathfrak{T}(f)$的谱是

$$\{c\in\mathbf{C}:\mathfrak{T}(f)-cI\text{不可逆}\}.$$

所以若$c\bar{\in}S(f)$，则$f(c)-c\neq0$。因此$h(z)=(f(z)-c)^{-1}$。于是我们有

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}(f)-c)\phi^\wedge&=\mathfrak{T}(f)\phi^\wedge-c\phi^\wedge\\&=\mathscr{T}(f\cdot\Phi)-\mathscr{T}(c\Phi)\\&=\mathfrak{T}(f-c)\phi^\wedge.\end{aligned}$$

因此 c 不属于$\mathfrak{T}(f)$的谱.

显然，$\mathfrak{T}(f)^*=\mathfrak{T}(f^*)$，所以从$f=f^*$便知$\mathfrak{T}(f)$是自伴算子。

若$z=x+\mathrm{i}y\in D(R)$，即$|\mathrm{Re}(z)|<R$，则$\mathrm{Re}\,z^2<R^2$。

若$\mathrm{Re}\,\mu>R^2$，设$f^\mu(z)=(\mu-z^2)^{-1}$. 则$\mathfrak{T}(f^\mu)$是$\mathscr{L}(\{B\})$上的有界算子。

因为$\Phi(\cdot)\to f^\mu(\cdot)\Phi(\cdot)$是$\mathfrak{M}$到$\mathfrak{M}$的单满映射，而$\mathscr{L}(\{B\})$是$\{\phi^\wedge\}$的闭包。所以$\mathfrak{T}(f^\mu)$的象是稠密的。

现在我们取$f(z)=z^2$，则$\mathscr{A}=\mathfrak{T}(f)$是自伴无界闭算子，而且对$\mu\overline{\in}(-\infty,R^2]$，

$$\mathfrak{T}(f^\mu)=(\mu-\mathscr{A})^{-1}=\mathscr{R}(\mu,\mathscr{A})$$

是$\mathscr{A}$的预解式。$\mathscr{R}(\mu,\mathscr{A})$是$\boldsymbol{C}\backslash(-\infty,R^2]$上的解析函数。

设$1/4<c<\mathrm{Re}\lambda<c_1$，则

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{R}(\lambda^2,\mathscr{A})\phi^\wedge,\psi^\wedge)\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}(\lambda^2-z^2)^{-1}\{(\Phi(z),\Psi(-\bar{z}))\\
&\qquad+(M(z)\Phi(z),\Psi(\bar{z}))\}\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2\lambda}\{(\Phi(\lambda),\Psi(-\lambda))+(M(\lambda)\Phi(\lambda),\Psi(\bar{\lambda}))\}\\
&\quad+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c_1-\mathrm{i}\infty}^{c_1+\infty}(\lambda^2-z^2)^{-1}\{(\Phi(z),\Psi(-\bar{z}))\\
&\qquad+(M(z)\Phi(z),\Psi(\bar{z}))\}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

(其中我们用了以下结果：$\operatorname*{Res}_{z=\lambda}(\lambda^2-z^2)^{-1}=1/2\lambda$)。于是$\lambda\to(\mathscr{R}(\lambda^2,\mathscr{A})\phi^\wedge,\psi^\wedge)$是解析函数，若$\lambda^2\overline{\in}(-\infty,R^2)$，即$\lambda\overline{\in}\mathrm{i}\boldsymbol{R}$及$\lambda\overline{\in}[-1/2.1/2]$。

现取$\Phi(z)=\mathrm{e}^{z^2}\Phi$，$\Psi=\mathrm{e}^{z^2}\Psi$，其中$\Phi,\Psi$与$z$无关。则

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{R}(\lambda^2,\mathscr{A})\phi^\wedge,\psi^\wedge)\\
&=(2\lambda)^{-1}\mathrm{e}^{2\lambda^2}\{(\Phi,\Psi)+(M(\lambda)\Phi,\Psi)\}\\
&\quad+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c_1-\mathrm{i}\infty}^{c_1+\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{2z^2}}{\lambda^2-z^2}\{(\Phi.\Psi)+(M(z)\Phi,\Psi)\}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

因为$\mathrm{Re}\lambda<c_1$，所以在$\mathrm{Re}z=c_1$上的积分是λ的整函数。从上式可作以下结论：

引理1.4 $M(\lambda)$是$\{\lambda:\ \mathrm{Re}\lambda>0,\lambda\in(0,1/2]\}$上的解析函数。

§2 截算子

取$T>0$。若$g\in G_A$，按Iwasawa分解$G_A=N_AA_AK$，可将g写为：$g=nak$，$a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}$。以$a(g)$记$a_1a_2^{-1}$。对$T>0$，设$\chi_T(g)=1$，如果$|a_1a_2^{-1}|_A\geqslant T$；否则取$\chi_T(g)=0$。

定义2.1 取$Z_\infty G_F\backslash G_A$上的连续函数$\phi$，设

$$\phi_B(g)=\int_{N_F\backslash N_A}\phi(ng)\mathrm{d}n.$$

对$T>0$，用以下公式定义截算子Λ^T：

$$\Lambda^T\phi(g)=\phi(g)-\sum_{\gamma\in B_F\backslash G_F}\phi_B(\gamma g)\chi_T(\gamma g).$$

引理2.1 截算子有以下的性质：

(1) $$\Lambda^T\phi(g)=\begin{cases}\phi(g)-\phi_B(g)\chi_T(g), & \text{若}|a(g)|>1,T>1,\\ \phi(g)-\phi_B(g), & \text{若}|a(g)|>T>1.\end{cases}$$

(2) 若g为一紧集Ω的元及T充分大，则

$$\Lambda^T\phi(g)=\phi(g).$$

(3) $(\Lambda^T\phi,\psi)=(\phi,\Lambda^T\psi)$。

(4) $T>1\Longrightarrow((1-\Lambda^T)\phi,\Lambda^T\psi)=0$，即$\Lambda^T$是$L^2$上的正交投射。

(5) 如果g属于Siegel集$\mathfrak{S}$，则$\Lambda^T\phi$的定义公式中的和

$$\sum_{\gamma\in B_F\backslash G_F}$$

只有有限个非零项。

证 已给g，利用Siegel集的性质知道，如果$|a(g)|>1$，及

$|\alpha(\gamma g)|>1$，则 $\gamma\in B_F$。故得(1)。

设$g\in\Omega$，$\Lambda^T\phi(g)\neq\phi(g)$，$T>1$。即存在 $\gamma\in B_F\backslash G_F$，使得

$$|\alpha(\gamma g)|>T>1.$$

由Siegel 集性质知只有有限个这样的 γ。这时γg属于一个紧集，同时$g\mapsto|\alpha(g)|$是连续函数.故存在T_0,使得$|\alpha(\gamma g)|<T_0$。若$T>T_0$，便得矛盾。故得(2)。

现考虑(3)。代入$\Lambda^T\phi$的定义，得

$$(\Lambda^T\phi,\psi)=(\phi,\psi)-(\sum\phi_B(\gamma g)\chi_T(\gamma g),\psi).$$

算出上式的第二项为

$$\int_{Z_\infty G_F\backslash G_A}\left\{\sum_{B_F\backslash G_F}\phi_B(\gamma g)\chi_T(\gamma g)\right\}\psi(g)\mathrm{d}g$$

$$=\int_{B_FN_AZ_\infty\backslash G_A}\phi_B(g)\chi_T(g)\bar{\psi}_B(g)\mathrm{d}g.$$

同样可算出

$$(\phi,\Lambda^T\psi)=(\phi,\psi)-\int_{B_FN_AZ_\infty\backslash G_A}\phi_B(g)\bar{\psi}_B(g)\chi_T(g)\mathrm{d}g.$$

因χ_T是实值函数，故得(3)。

因为$(1-\Lambda^T)\phi(g)=\sum\limits_{B_F\backslash G_F}\phi_B(\gamma g)\chi_T(\gamma g)$，所以

$$((1-\Lambda^T)\phi.\Lambda^T\psi)$$

$$=\int_{N_AB_FZ_\infty\backslash G_A}\phi_B(g)\chi_T(g)\left(\int_{N_F\backslash N_A}\Lambda^T\psi(ng)\mathrm{d}n\right)\mathrm{d}g.$$

但$\chi_T(g)=0$，除非$\chi_T(g)>T>1$。而这时，利用上面所证的(1)，便有

$$\int_{N_F\backslash N_A} \Lambda^T \psi(ng)\mathrm{d}n = \int_{N_F\backslash N_A} (\psi(ng) - \psi_B(ng))\mathrm{d}n = 0.$$

故得(4).

(5) 的证明同(2)一样. ∎

引理2.2 设有G_A上的函数ϕ及f满足以下条件：

$$\phi(\gamma z g) = \phi(g), \quad \gamma\in G_F, \ z\in Z_\infty, \ g\in G_A,$$

$$f(n\gamma z g) = f(g), \quad n\in N_A, \ \gamma\in B_F, \ z\in Z_\infty.$$

则当积分存在时便有以下等式

$$\left(\phi, \sum_{\gamma\in B_F\backslash G_F} f(\gamma g)\right) = \int_{B_F N_A Z_\infty\backslash G_A} \phi_B(g)\bar{f}(g)\mathrm{d}g.$$

证 用内积的定义便得

$$(\phi, \sum f(\gamma g)) = \int_{Z_\infty G_F\backslash G_A} \phi(g) \sum_{B_F\backslash G_F} \bar{f}(\gamma g)\mathrm{d}g.$$

因为$\phi(\gamma g) = \phi(g)$，所以上式右边等于

$$\int \sum \phi(\gamma g)\bar{f}(\gamma g)\mathrm{d}g = \int_{B_F Z_\infty\backslash G_A} \phi(g)\bar{f}(g)\mathrm{d}g$$

$$= \int_{B_F N_A Z_\infty\backslash G_A} \int_{N_F\backslash N_A} \phi(ng)\bar{f}(ng)\mathrm{d}n\mathrm{d}g. \quad ∎$$

现在让我们来研究截Eisenstein级数$\Lambda^T E(g, \Phi, z)$.

因为$\Lambda^T E(g, \Psi, \mu) = \sum_{B_F\backslash G_F} f(\gamma g)$，其中

$$f(g) = \mathrm{e}^{\langle H(g), \mu\alpha+\rho\rangle}\Psi(g) - E_B(g, \Psi, \mu)\chi_T(g).$$

另外利用公式$((1-\Lambda^T\cdot), \cdot) = 0$得

$$(\Lambda^T E(g, \Phi, \lambda), \Lambda^T E(g, \Psi, \mu))$$
$$= E((g, \Phi, \lambda), \Lambda^T E(g, \Psi, \mu)).$$

所以

$$(\Lambda^T E(g,\Phi,\lambda), \Lambda^T E(g,\Psi,\mu))$$

$$= \int_{N_A B_p Z_\infty \backslash G_A} E_B(g,\Phi,\lambda)\{e^{\langle H(g), \bar{\mu}\alpha+\rho\rangle}\overline{\Psi}(g)$$

$$- \bar{E}_B(g,\Psi,\mu)\chi_T(g)\}dg$$

$$= \int (e^{\langle H(g), \lambda\alpha+\rho\rangle}\Phi(g) + e^{\langle H(g), -\lambda\alpha+\rho\rangle}(M(\lambda)\Phi)(g))$$

$$\times \{e^{\langle H(g), \bar{\mu}\alpha+\rho\rangle}\overline{\Psi}(g) - (e^{\langle H(g), \bar{\mu}\alpha+\rho\rangle}\overline{\Psi}(g)$$

$$+ e^{\langle H(g), -\bar{\mu}\alpha+\rho\rangle}\overline{(M(\mu)\Psi)}(g))\chi_T(g)\}dg.$$

利用G_A的Iwasawa分解，我们有

$$\int_{N_A B_p Z_\infty \backslash G_A} * dg$$

$$= \int_{A_p \backslash A_A^1 \times Z_\infty \backslash A_\infty^0 \times K} * e^{-\langle H(a_\infty), 2\rho\rangle} da' da_\infty dk.$$

再用以下公式

$$e^{\langle H(g), \lambda\alpha\rangle} = |\alpha(a_\infty(g))|^\lambda,$$

$$(\Phi,\Psi) = \int_{A_p \backslash A_A^1 \times K} \Phi(ak)\overline{\Psi}(ag)dadk,$$

$$\int_{Z_\infty \backslash A_\infty^0} |\alpha(a)|^\lambda da = \int_0^\infty t^\lambda \frac{dt}{t},$$

便得

$$\int e^{\langle H(g), \lambda\alpha+\rho\rangle}\Phi(g)e^{\langle H(g), \bar{\mu}+\rho\rangle}\overline{\Psi}(g)(1-\chi_T(g))dg$$

$$= \int_0^T t^{(\lambda+\bar{\mu})}\frac{dt}{t}(\Phi,\Psi) = (\Phi,\Psi)\frac{T^{\lambda+\bar{\mu}}}{\lambda+\bar{\mu}}$$

及

$$-\int e^{\langle H(g), \lambda\alpha+\rho\rangle}\Phi(g)\ e^{\langle H(g), -\bar{\mu}\alpha+\rho\rangle}\overline{M(\mu)\Psi(g)}\chi_T(g)dg$$

$$= -\int_T^\infty t^{-(\bar{\mu}-\lambda)} \frac{\mathrm{d}t}{t} (\Phi, M(\mu)\Psi)$$

$$= (\Phi, M(\mu)\Psi) \frac{T^{\lambda-\bar{\mu}}}{\lambda-\bar{\mu}},$$

及

$$\int e^{\langle H(g), -\lambda\alpha+\rho\rangle}(M(\lambda)\Phi)(g) e^{\langle H(g), \bar{\mu}\alpha+\rho\rangle}\bar{\Psi}(g)(1-\chi_T(g))\mathrm{d}g$$

$$= -(M(\lambda)\Phi, \Psi) \frac{T^{-\lambda+\bar{\mu}}}{\lambda-\bar{\mu}},$$

及

$$-\int e^{\langle H(g), -\lambda\alpha+\rho\rangle}(M(\lambda)\Phi)(g)\, e^{\langle H(g), -\bar{\mu}\alpha+\rho\rangle}$$

$$\times \overline{(M(\mu)\Psi)}(g)\chi_T(g)\mathrm{d}g$$

$$= -(M(\lambda)\Phi, M(\mu)\Psi) \frac{T^{-(\lambda+\bar{\mu})}}{\lambda+\bar{\mu}}.$$

设

$$\begin{aligned}\omega(\lambda_1, \bar{\mu}, \Phi, \Psi) &= (\lambda+\bar{\mu})^{-1}\{T^{\lambda+\bar{\mu}}(\Phi, \Psi) - T^{-(\lambda+\bar{\mu})}(M(\lambda)\Phi, M(\mu)\Psi)\} \\ &\quad + (\lambda-\bar{\mu})^{-1}\{T^{\lambda-\bar{\mu}}(\Phi, M(\mu)\Psi) - T^{-\lambda+\bar{\mu}}(M(\lambda)\Phi, \Psi)\}.\end{aligned}$$

则以上计算给出以下的重要的截Eisenstein 级数的内积公式（亦常称为Maaβ-Selberg关系式）。

引理2.3 对$\lambda, \mu \in \{z: \mathrm{Re}\, z > 1/2\}$，有

$$(\Lambda^T E(g, \Phi, \lambda), \Lambda^T E(g, \Psi, \mu)) = \omega(\lambda, \bar{\mu}, \Phi, \Psi). \quad \blacksquare$$

考虑两个复变数的函数$f(z, z')$，在(z_0, z'_0)展开成 Taylor级数：

$$\sum_{m, m' \geq 0} a_{m, m'}(z-z_0)^m (z'-z'_0)^{m'},$$

其中

$$a_{m,m'}=\frac{1}{m!m'!}\frac{\partial^{m+m'}}{\partial z^m\partial z'^{m'}}f(z,z')\Big|_{\substack{z=z_0\\ z'=z'_0}}.$$

若这个Taylor级数在(s_1,s'_1)收敛，则

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left|\frac{1}{(m!)^2}\frac{\partial^{2m}}{\partial z^m\partial z'^m}f(z,z')\Big|_{\substack{z=z_0\\ z'=z'_0}}\right|^{\frac{1}{2m}}$$

$$\leqslant(\min(r,r'))^{-1},$$

其中$r=|s_1-s_0|$，$r'=|s'_1-s'_0|$。

在复平面的区域$D=\{\lambda:\ \mathrm{Re}\,\lambda>0,\ \mathrm{Im}\,\lambda\neq0\}$内$(\lambda+\bar{\lambda})\neq0$，$(\lambda-\bar{\lambda})\neq0$，$M(\lambda)$是解析函数，所以$\omega(\lambda,\bar{\lambda},\Phi,\Psi)$在此区域亦是解析函数。故此，对$\lambda_0=\sigma_0+\mathrm{i}t_0\in D$，若$|\lambda-\lambda_0|<\min(\sigma_0,t_0)$，则$\omega(\lambda,\bar{\mu},\Phi,\Psi)$在$(\lambda_0,\bar{\lambda}_0)$展开的Taylor级数在$(\lambda,\bar{\lambda})$收敛，于是

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left|\frac{1}{(m!)^2}\frac{\partial^{2m}}{\partial\lambda^m\partial\bar{\mu}^m}\omega(\lambda,\bar{\mu},\Phi,\Psi)\Big|_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ \mu=\lambda_0}}\right|^{\frac{1}{2m}}$$

$$\leqslant(\min(\sigma_0,t_0))^{-1},$$

即是说

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Lambda^T E(g,\Phi,\lambda)\right\|^{\frac{1}{n}}\leqslant(\min(\sigma_0,t_0))^{-1}.$$

从幂级数收敛条件，便知：如果$|\lambda-\lambda_0|<\min(\sigma_0,t_0)$，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\|\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Lambda^T E(g,\Phi,\Lambda)\right\||\lambda-\lambda_0|^n$$

收敛。所以，对$|\lambda-\lambda_0|<\min(\sigma_0,t_0)$，$\lambda_0\in D$，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\Lambda^T E(g,\Phi,\Lambda)(\lambda-\lambda_0)^n$$

对L^2范数收敛。由此可见，在$\mathrm{Re}\lambda>1/2$上解析的函数$\Lambda^T E(g,\Phi,\lambda)$，其Taylor级数在

$$\{\lambda:\ \mathrm{Re}\,\lambda>0,\ \lambda\overline{\in}(0,1/2]\}$$

上定义解析函数。同时上引理关于$\Lambda^T E$内积的Maaβ-Selbng 关系

亦可扩张到以上区域.

最后由Λ^T的定义，得

$$E(g,\Phi,\lambda)=\Lambda^T E(g,\Phi,\lambda)+\sum_{\gamma\in B_{\mathbb{F}}\backslash G_{\mathbb{F}}} E_B(g,\Phi,\lambda).$$

对$g\in$Siegel区域，上式第二项的和只有有限多项. 故此证得以下引理

引理2.4 在$\{\lambda:\ \mathrm{Re}\,\lambda>0,\ \lambda\overline{\in}(0,1/2]\}$中，$E(g,\Phi,\lambda)$是解析函数. ∎

§3 常数项原则

引理3.1 设ϕ是$G_F\backslash G_A$上的连续函数，ϕ满足以下条件：

(1) ∃常数r'，使得对任一Siegel集$\mathfrak{S}'$，∃常数c'，使得对$g\in\mathfrak{S}'$有

$$|p(g)|\leqslant c' e^{\langle H'(g),\, r'\alpha\rangle}.$$

(2) ∃整数N，使得如果$\{p^{(k)}:1\leqslant k\leqslant l\}$是$\mathfrak{a}$上次数$\leqslant N$的多项式的基，则存在复数$\zeta$及满足定义1.1中条件的函数$\Phi^k$，使得

$$\int_{N_F\backslash N_A}\phi(ng)\mathrm{d}n=e^{\langle H(g),\,\zeta\alpha\rangle}\sum_{k=1}^{l}p^{(k)}(H(g))\Phi^{(k)}(g).$$

那末，

(1) 对任一Siegel集$\mathfrak{S}$，∃常数c，使得对$g\in\mathfrak{S}$，

$$|\phi(g)|\leqslant c\{e^{\langle H(g),\,(\mathrm{Re}\,\zeta)\alpha\rangle}\}\left\{\sum_{k=1}|p^{(k)}(H(g))|\right\}.$$

(2) 若$\mathrm{Re}\,\zeta>1/2$，则$\phi\in L^2(G_F\backslash G_A)$.

引理3.2 设$G_F\backslash G_A$上有函数序列$\{\phi_n\}$满足以下条件：

(1) $\forall m$，∃常数$r'(m)$，使得，如果$\mathfrak{S}'$是Siegel集，则∃常数$c'(m)$，使得对$g\in\mathfrak{S}'$，有

$$|\phi(g)|\leqslant c'(m)\,e^{\langle H'(g),\,r'(m)a\rangle}.$$

(2) ∃整数N，使得如果$\{p^{(k)}:1\leqslant k\leqslant t\}$是$\mathfrak{a}$上次数$\leqslant N$的多项式的基，则

$$\int_{N_F\backslash N_A}\phi_m(ng)\mathrm{d}n=e^{\langle H(g),\,\zeta_m a\rangle}\sum_{k=1}^{t}p^{(k)}(H(g))\Phi_m^{(k)}(g),$$

其中$\Phi_m^{(k)}$满足定义1.1中的条件。

(3) 存在极限 $\lim\limits_{m\to\infty}\zeta_m=\zeta$ 及 $\lim\limits_{m\to\infty}\Phi_m^{(k)}=\Phi^{(k)}$，则存在 $G_F\backslash G_A$ 上函数 ϕ，使得

(a) 在紧集上有一致收敛 $\lim\limits_{m\to\infty}\phi_m(g)=\phi(g)$。

(b) 对任一Siegel集，∃常数c，使得

$$|\phi_m(g)|\leqslant c\{e^{\langle H(g),\,(\mathrm{Re}\zeta_m)a\rangle}\}\left\{\sum_{k=1}^{t}|p^{(k)}(H(g))|\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{t}\|\Phi_m^{(k)}\|\right\}.$$

(c) 设 $\nu(m)=\sum\limits_{k=1}^{t}\|\Phi_m^{(k)}\|$。设$\mathfrak{S}$为任一Siegel集。对 $u>0$，以$\mathcal{F}^u$, $\mathcal{F}_B^u$分别记集$\{g\in\mathfrak{S}:|a(g)|>u\}$在 $G_F\backslash G_A$ $B_F\backslash G_A$ 上的投影。对充分大的 u，有

$$\int_{G_F\backslash G_A-\mathcal{F}^u}|\phi_n(g)|^2\mathrm{d}g=O(\nu^2(n)),$$

$$\int_{\mathcal{F}_B^u}|\phi_n(g)-\phi_{n,B}(g)|^2\mathrm{d}g=O(\nu^2(n)),$$

以及对$G_F\backslash G_A$上任一可积函数ψ，有

$$\int_{G_F\backslash G_A}\psi(g)\mathrm{d}g=\int_{\mathcal{F}_B^u}\psi(g)\mathrm{d}g+\int_{G_F\backslash G_A-\mathcal{F}^u}\psi(g)\mathrm{d}g.$$

以上两个引理的证明从略。

设有序列$\{z_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$，$z_0\in R$，及有满足定义1.1的函

数序列$\{\Phi_n\}$，$\|\Phi_n\|=1$，使得序列$\{\nu_n\}$无界，$\nu_n=\|M(z_n)\Phi_n\|$。选子序列使得$\lim\limits_{n\to\infty}\nu_n=\infty$及(对范数)存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n^{-1}M(z_n)\Phi_n=\Phi_0.$$

这样序列$\{E(\cdot,\nu_n^{-1}\Phi_n,z_n)$满足以上引理3.2，故(对紧集上一致收敛拓扑)有极限

$$\lim_{n\to\infty}E(\cdot,\nu_n^{-1}\Phi_n,z_n)=\phi_0,$$

而且

$$\int_{N_F\backslash N_A}\phi(ng)\mathrm{d}n=\mathrm{e}^{\langle H(g),-z_0\alpha+\rho\rangle}\Phi_0(g).$$

又由引理3.1，知$\phi_0\in L^2(G_F\backslash G_A)$。显然$\phi_0\in\mathscr{L}(\{B\})$。

对$z\in(0,1/2]$，设

$$\mathscr{L}(z)=\{\psi\in\mathscr{L}(\{B\}):\psi_B(g)=\mathrm{e}^{\langle H(g),-z\alpha+\rho\rangle}\Psi(g),\Psi\in\mathscr{C}\},$$

因为$\psi_B=0\Rightarrow\psi=0$，故知$\dim_G\mathscr{L}(z)<\infty$。

对$\Phi(z)\in\mathfrak{M}(R)$，$\psi\in\mathscr{L}(z)$，则

$$\begin{aligned}(\phi^\wedge,\psi)_{G_F\backslash G_A}&=(\phi,\psi_B)_{B_FN_A\backslash G_A}\\&=\int_{A_F\backslash A_A}\mathrm{d}a\int_K\mathrm{d}k\int_{\mathrm{Re}\zeta=\zeta_0}^{B_FN_A\backslash G_A}\frac{|\mathrm{d}\zeta|}{2\pi}\mathrm{e}^{\langle H(a),\zeta\alpha+\rho\rangle}\\&\quad\times\Phi(\zeta,ak)\mathrm{e}^{\langle H(a),-z\alpha+\rho\rangle}\overline{\Psi}(ak)\mathrm{e}^{-\langle H(a),2\rho\rangle}\\&=\int\mathrm{d}a\int\mathrm{d}k\Phi(z,ak)\overline{\Psi}(ak)\\&=(\Phi(z),\Psi).\end{aligned}$$

所以

$$(\phi^\wedge,\mathscr{A}\psi)=(\mathscr{A}\phi^\wedge,\psi)=z^2(\Phi(z),\Psi)=(\phi^\wedge,z^2\psi).$$

结论是：$\psi\in\mathscr{L}(z)(z\in R)$，$\mathscr{A}\psi=z^2\psi$。因此如果$z_1\neq z_2$，则

$$\mathscr{L}(z_1)\perp\mathscr{L}(z_2).$$

显然，存在常数c，使得$\forall z\in(0,1/2]$，$\forall\psi\in\mathscr{L}(z)$，

$$\|\Psi\|\leqslant c\|\psi\|.$$

如果存在序列$\{z_n\}$，$\lim z_n=z_0\in(0,1/2]$，并且$\forall n$，

$$\mathscr{L}(z_n)\neq\{0\},$$

则可选满足以上两个引理序 列$\{\psi_n\}$，$\psi_n\in\mathscr{L}(z_n)$，$\|\psi_n\|=1$。据控制收敛定理，可知 在 $L^2(G_F\backslash G_A)$中极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n$ 存 在， 但这与$\{\mathscr{L}(z_n)\}$是互相正交空间矛盾。因 此$\{z\in(0,1/2]:\mathscr{L}(z)\neq0\}$是$(0,1/2]$的离散子集，同时如果$z_0$不在此子集内，则$M(z)$在$z_0$(在$C^\times-R^\times$中)的一个邻域上有界，并且极限 $\lim\limits_{z\to z_0}M(z)$存在。

现设有两个序列$\{z_n\}$，$\{z'_n\}$及$\Phi\in\mathscr{E}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0=\lim_{n\to\infty}z'_n$$

及

$$\lim_{n\to\infty}M(z_n)\Phi\neq\lim_{n\to\infty}M(z'_n)\Phi.$$

应用引理3.2，可知存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\{E(\cdot,\Phi,z_n)-E(\cdot,\Phi,z'_n)\}=\phi_0.$$

设$\lim\limits_{n\to\infty}(M(z_n)\Phi-M(z'_n)\Phi)=\Phi_0$。现在可重复前面各步骤，以便获得结论：除在$(0,1/2]$中的一个离散子集外，$M(z)$可以扩张为$\{z:\mathrm{Re}z>0\}$上的连续函数。按Riemann 可去奇点定理便知，除$(0,1/2]$中的一个离散子集外，$M(z)$是右复平面上的解析函数。

下一步证明 0 不是集 $\{z\in(0,1/2]:\mathscr{L}(z)\neq0\}$的极限点。否则设有收敛于 0 的单调递减序列$\{z_n\}$，使得$\forall n$，$\mathscr{L}(z_n)\neq0$，则有函数序列$\{\psi_n\}$，满足$\psi_n\in\mathscr{L}(z_n)$，$\|\psi_n\|=1$。设$\Psi_n$满足定义 1.1 的条件，使得

$$\psi_{n,B}(g)=e^{\langle H(g),-z_n\alpha+\rho\rangle}\Psi_n(g).$$

又设$\Psi'_n=\|\Psi_n\|^{-1}\Psi_n$。不妨假设存在极 限 $\lim\limits_{n\to\infty}\Psi'_n$，那么，根据引理3.2，有

$$\int_{G_F\backslash G_A}\psi_m(g)\bar{\psi}_n(g)\mathrm{d}g=\int_{\mathscr{F}_B^u}\psi_m(g)\bar{\psi}_n(g)\mathrm{d}g+O(\|\Psi_m\|)$$

及

$$\int_{\mathscr{F}_B^u} \psi_m(g)\bar{\psi}_n(g)\mathrm{d}g = \int_{\mathscr{F}_B^u} \psi_{m,B}(g)\bar{\psi}_n(g)\mathrm{d}g + O(\|\Psi_m\|).$$

设$\mathscr{F}'$是$\mathscr{F}_B^u$在 $N_A B_F \backslash G_A$ 的投影。可假设 $\mathscr{F}'$ 在 $B_F \backslash G_A$ 的迹象是$\mathscr{F}_B^u$，则

$$\int_{\mathscr{F}_B^u} \psi_{m,B}(g)\bar{\psi}_n(g)\mathrm{d}g = \int_{\mathscr{F}'} \psi_{m,B}(g)\bar{\psi}_{n,B}(g)\mathrm{d}g,$$

故得

$$\int_{G_F \backslash G_A} \psi_m(g)\bar{\psi}_n(g)\mathrm{d}g$$

$$= \int_{A^+(u,\infty)} e^{\langle H(a), -2\rho\rangle} \left\{ \int_{A_F \backslash A_A^1 \times K} \psi_{m,B}(aa'k) \times \bar{\psi}_{n,B}(aa'k)\mathrm{d}a'\mathrm{d}k \right\}\mathrm{d}a + O(\|\Psi_n\|)$$

$$= \int_{A^+(u,\infty)} e^{\langle H(a), -(z_m+z_n)a\rangle} \left\{ \int_{A_F \backslash A_A^1 \times K} \Psi_m(aa'k) \times \bar{\Psi}_n(aa'k)\mathrm{d}a'\mathrm{d}k \right\}\mathrm{d}a + O(\|\Psi_n\|)$$

$$= \int_{A^+(u,\infty)} e^{\langle H(a), -(z_m+z_n)a\rangle} \left\{ \int_{A_F \backslash A_A^1 \times K} \Psi_m(aa'k) \times \bar{\Psi}_n(aa'k)\mathrm{d}a'\mathrm{d}k \right\}\mathrm{d}a + O(\|\Psi_n\|)$$

$$= (z_m + z_n)^{-1} u^{-(z_m+z_n)} (\Psi_m, \Psi_n) + O(\|\Psi_n\|).$$

取$m = n$，得

$$1 = (2z_m)^{-1} u^{-2z_m} \|\Psi_m\|^2 + O(\|\Psi_m\|).$$

所以

$$\|\Psi_m\| = O(z_m^{1/2}).$$

现取$m \neq n$，则$\mathscr{L}(z_n) \perp \mathscr{L}(z_m)$，故此

$$0 = (z_m + z_n)^{-1} u^{-(z_m+z_n)} (\Psi_m, \Psi_n) + O(z_m^{1/2}).$$

所以

$$0=(z_m+z_n)^{-1}(z_m z_n)^{\frac{1}{2}}(\Psi'_m \Psi'_n)+O(z_m^{1/2})。$$

于是

$$0=z_n^{1/2}(z_m+z_n)^{-1}(\Psi'_m \Psi'_n)+O(1)。$$

因为 $\lim\limits_{m,n\to\infty}(\Psi'_m,\Psi'_n)=1$，所以 $\forall m,n$，$z_n^{1/2}(z_m+z_n)^{-1}$ 有界。这与$z_m,z_n\to 0$，并单调递减于 0 矛盾。

综上所述，可作以下结论。

引理3.3 除了区间$(0,1/2]$中的有限个点外，$M(z)$是$\{z:\mathrm{Re}\,z>0\}$上的解析函数。▌

引理3.4 设U是$\mathbf{C}$的开子集。设$\forall z\in U$，$E(g,z)$是$G_F\backslash G_A$上的连续函数。

(1) 设$\forall z\in U$，$\exists$常数r，使得，如果$\mathfrak{S}$是Siegel 区域，$\exists$常数c（c与z有关），使得，对$g\in\mathfrak{S}$，

$$|E(g,z)|\leqslant ce^{\langle H(g),\, r a}。$$

(2) $\exists$整数N，使得如果$\{p^{(k)}:1\leqslant k\leqslant t\}$是$\mathfrak{a}$上次数$\leqslant N$的多项式的基，则

$$\int_{N_F\backslash N_A} E(ng,z)\mathrm{d}n=e^{\langle H(g),\, z a}\sum_{k=1}^{t}p^{(k)}(H(g))\Phi^{(k)}(g,z)。$$

(3) 设$\Phi^{(k)}$是U上的解析函数。

则$E(g,z)$是$G_F\backslash G_A\times U$上的连续函数，对每一固定的$g$，$z\to E(g,z)$是$U$上的解析函数。

证明从略。

从引理3.4可作结论

引理3.5 除了区间$(0,1/2]$中的有限个点外，$E(g,\Phi,z)$是$\{z:\mathrm{Re}\,z>0\}$上的解析函数。

§4 解析延拓

设$z_1,\cdots,z_n\in(0,1/2]$，使得在

$$U=\{z\in \boldsymbol{C}:\mathrm{Re}\, z>0,\ z\neq z_1,\cdots,z_n\}$$

上 $M(z)$, $E(\cdot,\Phi,z)$是解析函数。在U上$\Lambda^T E$的内积满足 Maaβ-Selberg 关系式

$$(\Lambda^T E(g,\Phi,\lambda),\ \Lambda^T E(g,\Psi,\mu))=\omega(\lambda,\bar{\mu},\Phi,\Psi).$$

设 $\lambda=\sigma+\mathrm{i}\,\tau$, $\mu=\lambda$, 则

$$\begin{aligned}\omega(\lambda,\bar{\lambda},\Phi,\Psi)\\ &=(2\sigma)^{-1}\{T^{2\sigma}(\Phi,\Psi)-T^{-2\sigma}(M(\lambda)\Phi,M(\lambda)\Psi)\}\\ &\quad+(2\mathrm{i}\tau)^{-1}\{T^{2\mathrm{i}\tau}(\Phi,M(\lambda)\Psi)\\ &\quad-T^{-2\mathrm{i}\tau}(M(\lambda)\Phi,\Psi)\}.\end{aligned}$$

取Φ使得$\|\Phi\|=1$, $\|M(\lambda)\Phi\|=\|M(\lambda)\|$，然后再设$\Psi=\Phi$，则

$$(2\sigma)^{-1}\{T^{2\sigma}-T^{-2\sigma}\|M(\lambda)\|^2\}+\tau^{-1}\mathrm{Im}(T^{2\mathrm{i}\tau}(\Phi,M(\lambda)\Phi))\geqslant 0.$$

用 Cauchy-Schwartz 不等式便知

$$(2\sigma)^{-1}\{T^{2\sigma}-T^{-2\sigma}\|M(\lambda)\|^2\}+|\tau|^{-1}\|M(\lambda)\|\geqslant 0.$$

因为$\|M(\lambda)\|\geqslant(\Phi,M(\lambda)\Phi)$，所以

$$\frac{T^{-2\sigma}}{2\sigma}\|M(\lambda)\|^2-\frac{1}{|\tau|}\|M(\lambda)\|-\frac{T^{2\sigma}}{2\sigma}\leqslant 0.$$

于是

$$\|M(\lambda)\|\leqslant T^{2\sigma}\left(1+\frac{2\sigma}{|\tau|}\right).$$

故此对 $\mathrm{i}t(t\neq 0)$的任一个，在$\{\mathrm{Re}\, z>0\}$中的邻域上$\|M(\lambda)\|$有界，而且

$$\lim_{\substack{\lambda\to\mathrm{i}t\\ \sigma\downarrow 0}} M^*(\lambda)M(\lambda)=I.$$

因为$M^*(\lambda)=M(\bar{\lambda})$，所以

$$\lim_{\lambda\to\mathrm{i}t} M(\bar{\lambda})M(\lambda)=I.$$

设区间$[a,b]$不包含 0，$\exists\,\varepsilon>0$，使得对$\lambda=\sigma+\mathrm{i}\tau$, $0\leqslant\sigma\leqslant\varepsilon$, $a\leqslant\tau\leqslant b$, $\|M^{-1}(\lambda)\|$有界，所以

$$\lim_{\sigma\searrow 0}\|M^{-1}(\sigma\quad \mathrm{i}\tau)-M(\sigma+\mathrm{i}\tau)\|=0.$$

现在假定，当 $\mathrm{Re}\,\lambda<0$时，有 $M(\lambda)=M^{-1}(-\lambda)$。

取围道C，如图 1 所示。

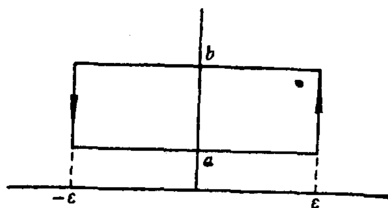


图 1

显然对$0<|\sigma|<\varepsilon$，$a<\tau<b$，

$$M(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{M(z)\mathrm{d}z}{z-\lambda}$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_a^b\left\{\frac{M(-\delta+\mathrm{i}\,t)}{-\delta+\mathrm{i}t-\lambda}-\frac{M(\delta+\mathrm{i}t)}{\delta+\mathrm{i}t-\lambda}\right\}\mathrm{d}t.$$

上式第二个积分等于

$$\int_a^b\left\{\frac{M^{-1}(\delta-\mathrm{i}\,t)}{-\delta+\mathrm{i}t-\lambda}-\frac{M(\delta+\mathrm{i}t)}{\delta+\mathrm{i}t-\lambda}\right\}\mathrm{d}t,$$

再取极限 $\delta\to 0$，得

$$\int_a^b\left\{\frac{M(\mathrm{i}t)}{\mathrm{i}t-\lambda}-\frac{M(\mathrm{i}\,t)}{\mathrm{i}t-\lambda}\right\}\mathrm{d}t=0.$$

可见，在左复平面上所定义的 $M(\lambda)$是右复平面上的 $M(\lambda)$的解析延拓。

引理4.1 除$[-1/2,1/2]$中有限点 $0,\pm z_1,\cdots,\pm z_n$外,$M(z)$是解析函数。

利用 §2 的引理，可知对所有 $\tau\neq 0$, $\forall g$（对紧集上一致收敛拓扑）

$$\lim_{\sigma\searrow 0}E(g,\Phi,\sigma+\mathrm{i}\tau)=E(g,\Phi,\mathrm{i}\tau).$$

故可用上式定义 $E(g,\Phi,z)$在虚数轴上的值。然后，对$\mathrm{Re}z\leqslant 0$，取定义

$$E(g,\Phi,z)=E(g,M(\lambda)\Phi,-z).$$

据引理3.4便得到如下的

引理4.2 除$[-1/2,1/2]$中有限个点$0,\pm z_1,\cdots,z_n$外，$E(\cdot,\Phi,z)$是解析函数。

现设$z_0=0$，又设C_i是以ε为半径，以z_i为圆心的小圆，令ε充分小，使诸小圆C_i互不相交。以C表图2中所示曲线。

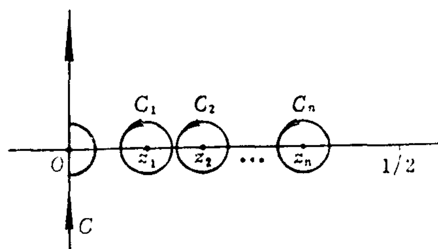


图 2

已知

$$(\phi^\wedge,\psi^\wedge)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\Phi(z),\Psi(-\bar{z})\;+(M(z)\Phi(z),\Psi(\bar{z}))dz,$$

$$c>\langle\rho,\rho\rangle=1/4。$$

用$\|M(\lambda)\|$的估值，便得

$$(\phi^\wedge,\psi^\wedge)=\frac{1}{2\pi i}\int_C[(\Phi(z),\Psi(-\bar{z}))+(M(z)\Phi(z),\Psi(\bar{z}))]dz$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}(M(z)\Phi(z),\Psi(\bar{z}))dz.$$

请注意，$(\Phi(z),\Psi(-\bar{z}))$是解析函数，所以

$$\int_{C_j}(\Phi(z),\Psi(-\bar{z}))dz。$$

设$\mathscr{E}(\cdot)$是算子$\mathscr{A}$的单位分解，$\mathscr{R}$为预解式，则(Stone[1])

$$\frac{1}{2}\{(\mathscr{E}(b)\phi^\wedge,\psi^\wedge)-(\mathscr{E}(b-0)\phi^\wedge,\psi^\wedge)\}$$

$$-\frac{1}{2}\{(\mathscr{E}(a)\phi^\wedge,\psi^\wedge)-(\mathscr{E}(a-0)\phi^\wedge,\psi^\wedge)\}$$

$$=\lim_{\delta\searrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,b,c,\delta)}(\mathscr{R}(\lambda,\mathscr{A})\phi^\wedge,\psi^\wedge)d\lambda。$$

(积分路线见图3。)因为 $\mathscr{A}$ 的谱是 $(-\infty,1/4)$ 的子集，所以

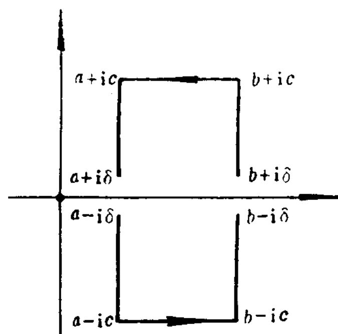


图 3

$$\mathscr{E}(1/4)=I。$$

选 a，b 使 $b>a>0$，并且 $z_1^2,\cdots,z_n^2$ 中只有一个，如 z_j^2，属于$[a,b]$ (C_j在 $z\to z^2$ 下的象在C之内)。

我们来算$(\mathscr{R}(\lambda,\mathscr{A})\phi,\psi)$(交换积分次序，用残数计算)，得

$$\frac{1}{2}\{(\mathscr{E}(b)\phi^\wedge,\psi^\wedge)-(\mathscr{E}(b-0)\phi^\wedge,\psi^\wedge)\}$$

$$-\frac{1}{2}\{(\mathscr{E}(a)\phi^\wedge,\psi^\wedge)-(\mathscr{E}(a-0)\phi^\wedge,\psi^\wedge)\}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}(M(z)\Phi(z),\Psi(\bar{z}))dz。$$

以上公式对同样地选取的任一对(a',b')亦成立。如果我们取$a'\to a-0$，$b'\to b-0$，则可见

$$\mathscr{E}(b)-\mathscr{E}(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}(M(z)\Phi(z),\Psi(\bar{z}))dz.$$

所以，若 $M(z)$ 在 $z_1,\cdots,z_n$ 不是解析函数(上式右边$\neq 0$)，则 $z_1^2,\cdots,z_n^2$ 是 $\mathscr{A}$ 的谱中的孤立点。

另一方面

$$(\mathscr{R}(\lambda^2,\mathscr{A})\phi^\wedge,\psi^\wedge)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\lambda^2-z^2)^{-1}\{(\Phi(z),\Psi(-\bar{z}))$$
$$+(M(z)\Phi(z),\Psi(\bar{z}))\}dz,$$

$$c>\frac{1}{4}\geqslant z_j^2,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

所以，对任一 $\phi,\psi\in\mathscr{L}(\{B\})$，

$$\lambda\to(\mathscr{R}(\lambda^2,\mathscr{A})\phi,\psi).$$

只有单极点：$z_1,\cdots,z_n$。

如果 $c<\mathrm{Re}\lambda<c_1$，则

$$(\mathscr{R}(\lambda^2,\mathscr{A})\phi^\wedge,\psi^\wedge)$$
$$=(2\lambda)^{-1}\{(\Phi(\lambda),\Psi(-\bar{\lambda}))+(M(\lambda)\Phi(\lambda),\Psi(\bar{\lambda}))\}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}(\lambda^2-z^2)^{-1}\{(\Phi(z),\Psi(-\bar{z}))$$
$$+(M(z)\Phi(z),\Psi(\bar{z}))\}dz.$$

如前面一样，取 $\Phi(z)=e^{z^2}\Phi$, $\Psi(z)=e^{z^2}\Psi$，则

$$(\mathscr{R}(\lambda^2,\mathscr{A})\phi^\wedge,\ \psi^\wedge)$$
$$=(2\lambda)^{-1}e^{2\lambda^2}\{(\Phi,\Psi)+(M(\lambda)\Phi,\Psi)\}+\lambda\text{的整函数}.$$

故此，$z_1,\cdots,z_n$ 亦是 $M(\lambda)$ 的单极点。

故可得引理：

引理4.3 $M(\lambda)$ 和 $E(\cdot,\Phi,\lambda)$ 在 $\pm z_1,\cdots,\pm z_n$ 只有单极点。 ▎

余下只需讨论 $M(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 的解析性质。可以证明以下引理：

引理4.4 $\lambda=0$ 是 $M(\lambda)$ 及 $E(\cdot,\Phi,\lambda)$ 的可去奇点。

证明分三步。首先，利用预解式的积分公式证明单位分解在零点左连续，即 $\mathscr{E}(0)=\mathscr{E}(0-0)$。由此推出以下公式：取 $\lambda=\sigma+\mathrm{i}\tau$，则有

$$M(\lambda)=\frac{\sigma}{\pi}\int_{-1}^{+1}(\sigma^2+(y-\tau)^2)^{-1}M(\mathrm{i}y)\mathrm{d}y$$

$$+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\{(z-\lambda)^{-1}+(z+\bar{\lambda})^{-1}\}M(z)\mathrm{d}z.$$

第二步：在 Maaβ-Selberg 公式中取 $\mu=\lambda=\sigma+\mathrm{i}y$，然后取极限 $\sigma\to0$，便得

$$\begin{aligned}&(\Lambda^T E(\cdot,\Phi,\mathrm{i}y),\Lambda^T E(\cdot,\Psi,\mathrm{i}y))\\&\quad=(M^{-1}(\mathrm{i}y)M'(\mathrm{i}y)\Phi,\Psi)\\&\qquad-(2\mathrm{i}y)^{-1}\{M(\mathrm{i}y)\Phi,\Psi)-(M^{-1}(\mathrm{i}y)\Phi,\Psi)\},\end{aligned}$$

其中

$$M'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}M(z).$$

于是便知，在有孔邻域 $\{y:\ 0<|y|<Y\}(Y>0)$ 上

$$M^{-1}(\mathrm{i}y)M'(\mathrm{i}y)-(2\mathrm{i}y)^{-1}(M(\mathrm{i}y)-M^{-1}(\mathrm{i}y))>0.$$

由此推出 $\lim\limits_{y\to0}M(\mathrm{i}y)$ 存在及有正常数 c,r，使得在这个有孔邻域上有不等式：

$$\|M'(\mathrm{i}y)\|\leqslant cy^{r-1}.$$

最后一步：利用前两步的结果推出

$$\lim_{\sigma\searrow0,\tau\to0}M(\sigma+\mathrm{i}\tau)=M(0)$$

存在。因为 $M(0)$ 必等于 $\lim\limits_{\tau\to0}M(\mathrm{i}\tau)$，故知 $\|M(0)\|=1$。所以存在 $\varepsilon>0$，使得在 $\{\lambda:0<|\lambda|<\varepsilon,\ \mathrm{Re}\,\lambda\geqslant0\}$ 上 $M(\lambda)$ 及 $M(\lambda)^{-1}$ 一致有界。于是 $M(\lambda)$ 在零点的邻域上有界，即是说，$\lambda=0$ 是 $M(\lambda)$ 的可去奇点。以上各步的详细讨论从略。

第六章 迹 公 式

大家都知道 Fourier 级数理论中的 Poisson 求和公式是一件极有威力的工具。若我们把实数 $\boldsymbol{R}$ 看成交换拓扑群，把整数 $\boldsymbol{Z}$ 看成群 $\boldsymbol{R}$ 的离散子群，则 Fourier 级数便可看成齐性空间 $\boldsymbol{Z}\backslash\boldsymbol{R}$ 上的调和分析理论。若 G 是局部紧拓扑群，Γ 是 G 的离散子群，使得 $\Gamma\backslash G$ 有有限测度，自然会问齐性空间 $\Gamma\backslash G$ 上的调和分析理论中的 Poisson 求和公式是什么？当 G 是交换群，$\Gamma\backslash G$ 是紧拓扑空间时，我们亦有类似 Fourier 级数论的 Poisson 求和公式。Selberg 首先把 Poisson 求和公式推广到非交换拓扑群上，这就是他在1950年所发现的 $\mathrm{PSL}(2,\boldsymbol{R})$ 的迹公式。我们现在称这公式为 Selberg 迹公式。Tamagawa（玉河恒夫）在1960年发表了任意紧齐性空间 $\Gamma\backslash G$ 的迹公式。Arthur 于 1980 年提出任意既约代数群的迹公式。

本章采用 Arthur 的方法证明 GL(2)的迹公式。

§1 正则表示的积分核

设 G 为局部紧拓扑群，Γ 为 G 的离散子群，G 的 Haar 测度在 $\Gamma\backslash G$ 上诱导出不变测度。假设对此测度 $\Gamma\backslash G$ 的体积有限，齐性空间 $\Gamma\backslash G$ 上的二次可积复值函数组成 Hilbert 空间 $L^2(\Gamma\backslash G)$。G 在 $\Gamma\backslash G$ 上的右平移作用定义出 G 在 $L^2(\Gamma\backslash G)$的右正则表示 R，即对 $\phi\in L^2(\Gamma\backslash G)$，$x,y\in G$，

$$(R(y)\phi)(x)=\phi(xy)。$$

若 f 是 G 上有紧支集的连续函数，则可定义 $L^2(\Gamma\backslash G)$上积分算子

$$R(f)=\int_G f(y)R(y)\mathrm{d}y,$$

即对 $\phi\in L^2(\Gamma\backslash G)$，我们有

$$(R(f)\phi)(x)=\int_G f(y)\phi(xy)\mathrm{d}y.$$

上式右边的积分可以写成

$$\int_G f(x^{-1}y)\phi(y)\mathrm{d}y=\int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\Gamma}f(x^{-1}\gamma y)\phi(\gamma y)\mathrm{d}y.$$

设

$$K(x,y)=\sum_{\gamma\in\Gamma}f(x^{-1}\gamma y).$$

因为 ϕ 是 $\Gamma\backslash G$ 上的函数，所以立刻可得

$$(R(f)\phi)(x)=\int_{\Gamma\backslash G}K(x,y)\phi(y)\mathrm{d}y,$$

即是说 $K(x,y)$ 是积分算子 $R(f)$ 的核。

如果 $\Gamma\backslash G$ 是紧齐性空间，则算子 $R(f)$ 的迹是

$$\text{race } R(f)=\int_{\Gamma\backslash G}K(x,x)\mathrm{d}x.$$

但是在一般的情形下，上式的积分是不一定收敛的。

设 F 为代数数域，$\boldsymbol{A}$ 为 F 的 Adele 环。自此以后在本章取 G 为 GL(2)。将在前面讨论中的 G 取为

$$G_{\boldsymbol{A}}^1=\{g\in \mathrm{GL}(2)_{\boldsymbol{A}}:|\det g|_{\boldsymbol{A}}=1\}$$

并取前面的 Γ 为 $G_F=\mathrm{GL}(2)_F$。则由 $G_{\boldsymbol{A}}^1$ 在 $L^2(G_F\backslash G_{\boldsymbol{A}}^1)$ 上的右正则表示 R 所定义的积分算子 $R(f)$ 是这样的写出来：

$$R(f)\phi(x)=\int_{G_F\backslash G_{\boldsymbol{A}}^1}K(x,y)\phi(y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$K(x,y)=\sum_{\gamma\in G_F}f(x^{-1}\gamma y)$$

是$R(f)$的核。

§2 核的轨道分解

任一$\gamma\in G_F$可唯一分解为$\gamma=\gamma_s\gamma_u=\gamma_u\gamma_s$，其中$\gamma_s$是半单，$\gamma_u$是幂么。称$\gamma,\gamma'$为等价，若$\gamma_s,\gamma_s'$是$G_F$-共轭。以$\mathscr{O}$记由等价类所组成的集合。每一个$\mathfrak{o}\in\mathscr{O}$只包含一个由半单元所组成的共轭类。以$B$记矩阵群$\left\{\begin{pmatrix}* & * \\ 0 & *\end{pmatrix}\right\}$. 以$N$记矩阵群$\left\{\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$。现取$\gamma\in G_F$，若$\gamma$不与$B_F$内任一元$G_F$-共轭，则称$\gamma$为椭圆元．椭圆元的特征根不属于$F$。称$\mathfrak{o}$为椭圆元类，若$\mathfrak{o}$包含一个椭圆元。以$\mathscr{O}(G)$记由椭圆类所组成的集合。若$\mathfrak{o}\in\mathscr{O}\backslash\mathscr{O}(G)$，则$\mathfrak{o}$决定一个半单元$\gamma=\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}$，其中$\alpha,\beta\in F^\times$。

用以下图表引入一些记号，例如：当P是G时，A_P是G的中心Z。我们又常把M_P简写为M，N_P简记为N。

P	G	B
A_P	Z	A
M_P	G	A
N_P	1	N

定义2.1 对$\mathfrak{o}\in\mathscr{O}$，设

$$K_{G,\mathfrak{o}}(x,y)=\sum_{\gamma\in\mathfrak{o}}f(x^{-1}\gamma y).$$

$$K_{B,\mathfrak{o}}(x,y)=\sum_{\gamma\in A_F\cap\mathfrak{o}}\int_{N_A}f(x^{-1}\gamma ny)\mathrm{d}n.$$

$$K_P(x,y)=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathscr{O}}K_{P,\mathfrak{o}}(x,y).$$

则

$$K_P(x,y)=\sum_{\gamma\in M_F}\int_{N_A}f(x^{-1}\gamma ny)\mathrm{d}n.$$

令 R_P 为 G_A^1 在 $L^2(N_AM_F\backslash G_A^1)$ 上的右正则表示。则 $K_P(x,y)$ 是积分算子 $R_P(f)$的核。注意 R_G,K_G 分别是§1中的 R,K。

几何引理 以 P,P_i 等记集$\{G,B\}$的任一元，以 Δ_1^2 记$(M_{P_2}\cap P_1,A_{P_1})$的单根系。

(1) 若 $P_1\subset P_2$，则

$$\sum_{\{P:P_1\subset P\subset P_2\}}(-1)^{\dim(A_P/A_{P_2})}=\begin{cases}1, & 若\ P_1\neq P_2,\\0, & 若\ P_1=P_2.\end{cases}$$

(2) 以 τ 记集$(0,+\infty)$的特征函数。若 $P_2\supseteq P_1$，则令

$$\tau_1^2=\tau_{P_1}^{P_2}=\begin{cases}1, & 若\ P_1=P_2,\\\tau, & 若\ P_1\neq P_2,\end{cases}$$

$$\sigma_1^2=\sigma_{P_1}^{P_2}=\sum_{\{P_3:P_3\supset P_2\}}(-1)^{\dim(A_{P_3}/A_{P_2})}\tau_1^3\tau_3^G.$$

则

$$\tau_1^P\tau_P^G=\sum_{\{P_2:P_2\supset P\}}\sigma_1^2.$$

(3) 设 ω 为 $N_AA_A^1$ 的紧子集及 $T_0<0$，使得

$$G_A=P_F\mathfrak{S}^P(T_0,\omega)$$

对任一P成立，其中

$$\mathfrak{S}^P(T_0,\omega)=\{pak:p\in\omega,a\in A_\infty^0,k\in K,\\ 当\ \alpha\in\Delta_B^P\ 时有\ T_0<\alpha(a)\}.$$

对$T>0$，设

$$\mathfrak{S}^P(T_0,T,\omega)=\{x\in\mathfrak{S}^P(T_0,\omega):当\ \alpha\in\Delta_B^P\ 时有\ \alpha(x)\leqslant T\}.$$

令 $\mathscr{F}^P(x,T)$为 $\mathfrak{S}^P(T_0,T,\omega)$在 $A_{P,\infty}^0N_{P,A}M_{P,F}\backslash G_A$ 的象的特征函数。

若 $x=nak$ 是 x 的 Iwasawa 分解，其中 $a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\0 & a_2\end{pmatrix}$，则设

$|a(x)|=|a_1a_2^{-1}|_A$. 对固定的P及$T>0$，任一$x\in G_A$，以下等式成立：

$$\sum_{\{P_1:B\subset P_1\subset P\}}\sum_{\delta\in P_{1,F}\setminus P_F}\mathscr{F}^{P_1}(\delta x,T)\tau_{P_1}^P(|a(\delta x)|-T)=1.$$

这几何引理的证明不难，我们从略。

下面将$\mathscr{F}^{P_1}(x,T)$简记为$\mathscr{F}^1(x,T)$。

设$\tau_G=1$，$\tau_B^G=\tau_B=\tau=(0,+\infty)$的特征函数。我们给出如下

定义2.2 对$T>0$，令

$$k_o^T(x,f)=\sum(-\;\;)^{\dim(A_P/Z)}$$

$$\times\sum_{\delta\in P_F\setminus G_F}K_{P,o}(\delta x,\delta x)\tau_P(|a(\delta x)|-T).$$

显然在这里，我们有

$$k_o^T(x,f)=K_{G,o}(x,x)$$

$$-\sum_{\delta\in B_F\setminus G_F}K_{B,o}(\delta x,\delta x)\tau(|a(\delta x)|-T).$$

本节的目的是证明以下定理。

定理2.1 对任一充分大的T，有

$$\sum_{o\in\mathscr{O}}\int_{G_F\setminus G_A^1}|k_o^T(x,f)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

证 应用几何引理(3)中的等式。我们可以直接算出

$$k_o^T(x,f)$$

$$=\sum_P\sum_{\delta\in P_F\setminus G_F}(-1)^{\dim(A_P/Z)}K_{P,o}(\delta x,\delta x)\tau_P(|a(\delta x)|-T)$$

$$\times\sum_{\{P_1:B\subset P_1\subset P\}}\sum_{\xi\in P_{1,F}\setminus P_F}\mathscr{F}^1(\xi\delta x,T)\tau_{P_1}^P(|a(\xi\delta x)|-T)$$

$$=\sum_{\{P_1,P:B\subset P_1\subset P\}}\sum_{\delta\in P_{1,F}\setminus G_F}\{(-1)^{\dim(A_P/Z)}\mathscr{F}^1(\delta x,T)$$

$$\times \tau_1^P(|a(\delta x)| - T) K_{P,o}(\delta x, \delta x)\}$$

$$= \sum_{\{P_1, P, P_2 : P_1 \subset P \subset P_2\}} \sum_{\delta \in P_{1,F} \backslash G_F} \{(-1)^{\dim(A_P/Z)} \mathscr{F}^1(\delta x, T)$$

$$\times \sigma_1^2(|a(\delta x)| - T) K_{P,o}(\delta x, \delta x)\}.$$

所以

$$\sum_{o \in \mathscr{O}} \int_{G_F \backslash G_A^1} |k_o^T(x, f)| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{\{P_1, P_2 : P_1 \subset P_2\}} \sum_{o \in \mathscr{O}} \int_{P_{1,F} \backslash G_A^1} \Big\{ \mathscr{F}^1(x, T) \sigma_1^2(|a(x)| - T)$$

$$\times \Big| \sum_{\{P : P_1 \subset P \subset P_2\}} (-1)^{\dim(A_P/Z)}$$

$$\times \sum_{\gamma \in M_P \cap o} \int_{N_A} f(x^{-1} \gamma n x) \mathrm{d}n \Big| \Big\} \mathrm{d}x.$$

在这里$\{P_1, P_2 : P_1 \subset P_2\}$是$\{(B, B)(B \subset G), (G, G)\}$。因为$\sigma_B^B = 0$。另外$\sigma_G^G = 1$。以$G(T)$记$\mathfrak{S}^G(T_0, T, \omega)$在$Z_\infty^0 G_F \backslash G_A$的象，$G(T)$为紧集。则

$$\sum_{o \in \mathscr{O}} \int_{G_F \backslash G_A^1} |k_o^T(x, f)| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{o \in \mathscr{O}} \int_{G(T)} |K_{G,o}(x, x)| \mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{o \in \mathscr{O}} \int_{B_F \backslash G_A^1} \Big\{ \mathscr{F}^B(x, T) \sigma_B^G(|a(x)| - T)$$

$$\times \Big| \sum_{\gamma \in G_F \cap o} f(x^{-1} \gamma x)$$

$$- \sum_{\gamma \in A_F \cap o} \int_{N_A} f(x^{-1} \gamma n x) \mathrm{d}n \Big| \Big\} \mathrm{d}x.$$

在$G(T)$上的积分是有限的，对第二项我们先考虑绝对值号

内的差。

把 $x\in G_A^1$ 写成

$$x=nmak,$$

其中 $n\in N_A$，$m\in A_A^1$，$a\in A_\infty^0\cap G_A^1$，$k\in K$。使得 $|\alpha(a)|>T$。由约化理论知：存在与 T 无关的紧集 $\Omega_0\subseteq N_A A_A^1$，使得

$$|\alpha(a)|>T \implies a^{-1}nma\in\Omega_0.$$

我们现在证明只要 T 充分大及 $\sigma_B^g(|\alpha(x)|-T)\neq 0$，则

$$\sum_{\gamma\in\sigma} f(x^{-1}\gamma x)-\sum_{\gamma\in A_F\cap o}\int_{N_A} f(x^{-1}\gamma nx)\,dn$$

$$=\sum_{\gamma\in B_F\cap o} f(x^{-1}\gamma x)$$

$$-\sum_{\gamma\in A_F\cap o}\int_{N_A} f(x^{-1}\gamma nx)\,dn.$$

假设这并不正确，则 $\exists\gamma\in B_F\backslash G_F$，使得

$$0\neq f(k^{-1}a^{-1}m^{-1}n^{-1}\gamma nmak)$$

$$=f(k^{-1}(a^{-1}mna)^{-1}a^{-1}\gamma a(a^{-1}mna)k).$$

因为f是有紧支集的函数，所以存在紧集 $\Omega_1\subseteq G_A^1$，使得 $a^{-1}\gamma a\in\Omega_1$。用$G_F$的Bruhat分解：$G_F=B_F\cup B_F wN_F$。(这不难证明，事实上若 $c\neq 0$，则

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b-ac^{-1}d & a\\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c^{-1}d\\ 0 & 1\end{pmatrix}.)$$

可设 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$c\neq 0$ 及 $a=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}$，则

$$a^{-1}\gamma a=\begin{pmatrix} * & *\\ \alpha(a)c & *\end{pmatrix}.$$

但一方面 $a^{-1}\gamma a\in\Omega\Rightarrow|\alpha(a)c|$ 有界，另一方面，只要 T 充分大，从 $|\alpha(a)c|>Tc$，便得矛盾。

因为 $B_F\cap o=(A_F\cap o)N_F$，所以

$$\sum_{\gamma\in B_F\cap o} f(x^{-1}\gamma x)-\sum_{\gamma\in A_F\cap o}\int_{N_A} f(x^{-1}\gamma nx)\,dn$$

$$= \sum_{\gamma \in A_F \cap \mathfrak{o}} \left(\sum_{\nu \in N_F} f(x^{-1}\gamma \nu x) - \int_{N_A} f(x^{-1}\gamma n x) \mathrm{d}n \right).$$

利用从N的李代数 $\mathfrak{n}$ 到N的同构 $e:\mathfrak{n}\to N$: $X\mapsto \exp X$，便得

$$\sum_{\gamma \in A_F \cap \mathfrak{o}} \left(\sum_{\zeta \in \mathfrak{n}_F} f(x^{-1}\gamma e(\zeta) x) - \int_{\mathfrak{n}_A} f(x^{-1}\gamma e(X) x \right) \mathrm{d}X.$$

固定一个 A/F 上不等于 1 的酉特征标 ψ， 可 以 定 义 Fourier 变换：$\Phi\to\hat{\Phi}$,

$$\hat{\Phi}(\zeta) = \int_{\mathfrak{n}_A} \Phi(X)\psi(\langle X,\zeta\rangle)\mathrm{d}X.$$

应用 Poisson 求和公式，便得

$$\sum_{\gamma \in A_F \cap \mathfrak{o}} \left(\sum_{\zeta \in \mathfrak{n}_F} \int_{\mathfrak{n}_A} f(x^{-1}\gamma e(X) x)\psi(\langle X,\zeta\rangle)\mathrm{d}X \right.$$
$$\left. - \int_{\mathfrak{n}_A} f(x^{-1}\gamma e(X) x)\mathrm{d}x \right)$$
$$= \sum_{\gamma \in A_F \cap \mathfrak{o}} \left(\sum_{\zeta \in \mathfrak{n}'_F} \int_{\mathfrak{n}_A} f(x^{-1}\gamma e(X) x)\psi(\langle X,\zeta\rangle)\mathrm{d}X \right),$$

其中 $\mathfrak{n}'_F = \mathfrak{n}_F - \{0\}$。所以

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathscr{O}} \int_{B_F \backslash G_A^1} \left\{ \mathscr{F}^B(x,T)\sigma_B^Q(|a(x)| - T) \right.$$
$$\left. \times \left| \sum_{\gamma \in Q_F \cap \mathfrak{o}} f(x^{-1}\gamma x) - \sum_{\gamma \in A_F \cap \mathfrak{o}} \int_{N_A} f(x^{-1}\gamma n x)\mathrm{d}n \right| \right\} \mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_{B_F \backslash G_A^1} \left\{ \mathscr{F}^B(x,T)\sigma_B^Q(|a(x)| - T) \right.$$
$$\left. \times \sum_{\gamma \in A_F} \sum_{\zeta \in \mathfrak{n}'_F} \left| \int_{\mathfrak{n}_A} f(x^{-1}\gamma e(X) x)\psi(\langle X,\zeta\rangle)\mathrm{d}X \right| \right\} \mathrm{d}x.$$

取 $x = nmak$，其中 $k\in K$，$a\in A_\infty^0\cap G_A^1$，$n\in N_F\backslash N_A, m\in A_F\backslash A_A^1$。相对的 $\mathrm{d}x = |a(a)|^{-1}\mathrm{d}n\mathrm{d}m\mathrm{d}a\mathrm{d}k$。因为$m$及 $a^{-1}na$ 分别取值 于紧

集，所以有紧集 $\Omega\subset G_A^1$，使得以上在 $B_F\backslash G_A^1$ 的积分不大于常数乘以下式

$$\sum_{\gamma\in A_F}\sup_{y\in\Omega}\int_{A_\infty^0\cap G_A^1}\Big\{|\alpha(a)|^{-1}\sigma_B^G(H(a)-T)$$

$$\times\sum_{\zeta\in\mathfrak{n}'_F}\Big|\int_{\mathfrak{n}_A}f(y^{-1}a^{-1}\gamma e(X)ay)\psi(\langle X,\zeta\rangle)\mathrm{d}X\Big|\Big\}\mathrm{d}a$$

$$=\sum_{\gamma\in A_F}\sup_{y\in\Omega}\int_{A_\infty^0\cap G_A^1}\Big\{\sigma_B^G(|\alpha(a)|-T)$$

$$\times\sum_{\zeta\in\mathfrak{n}'_F}\Big|\int_{\mathfrak{n}_A}f(y^{-1}\gamma e(X)y)\psi(\langle X,\mathrm{Ad}(a)\zeta\rangle)\mathrm{d}X\Big|\Big\}\mathrm{d}a$$

（其中我们令 $y^{-1}a^{-1}\gamma e(X)ay=y^{-1}\gamma\,\mathrm{Ad}(a^{-1})e(X)y$，然后作换元 $X\to\mathrm{Ad}(a)X$)。因为 f 有紧支集，故知 $\gamma e(X)$ 属于 G_A^1 的紧集。所以 γ 为一离散紧集的元，即是说，$\sum\limits_{\gamma\in A_F}$ 是一个有限和。

我们把 $\mathfrak{n}_A$ 上的积分看成一个 Schwartz-Bruhat 函数的 Fourier 变换：

$$\zeta\to\int_{\mathfrak{n}_A}f(y^{-1}\gamma e(X)y)\psi(\langle X,\mathrm{Ad}(a)\zeta\rangle)\mathrm{d}X,$$

而 Schwartz-Bruhat 函数在 $\boldsymbol{A}_f$ 上的部分是一个带紧支集的局部常值函数。故在 $\mathfrak{n}_A\approx\boldsymbol{A}=F_\infty\times\boldsymbol{A}_f$ 上的积分可以化为有限个在 $\mathfrak{n}_\infty$ 上的积分的和。故此对任意 n，$\exists N$，使得

$$\sup_{y\in\Omega}\int_{A_\infty^0\cap G_A^1}\Big\{\sigma_B^G(|\alpha(a)|-T)$$

$$\times\sum_{\zeta\in\mathfrak{n}'_F}\Big|\int_{\mathfrak{n}_A}f(y^{-1}\gamma e(X)y)\psi(\langle X,\mathrm{Ad}(a)\zeta\rangle)\mathrm{d}X\Big|\Big\}\mathrm{d}a$$

$$\leqslant\text{常数}\int\sigma_B^G(|\alpha(a)|-T)\Big(\sum_{\zeta\in\mathfrak{n}'_{(\frac{1}{N}\mathfrak{o}_F)}}|\mathrm{Ad}(a)\zeta|^{-n}\Big)\mathrm{d}a<\infty.$$

现在让我们比较详细地看看以上的估计。

第一，在 $\sigma_B^g(|\alpha(a)|-T)\neq 0$ 的条件下，Schwartz-Bruhat函数 $X\mapsto f(y^{-1}\gamma e(X)y)\psi(\langle X,\mathrm{Ad}(a)\zeta\rangle)$ 在 $\mathfrak{n}_{A_f}$ 上只取有限个不同值，所以在 $\mathfrak{n}_{A_f}$ 的一个紧开子群移动下不变。于是积分

$$\int_{\mathfrak{n}_A} f(y^{-1}\gamma e(X)y)\psi(\langle X,\mathrm{Ad}(a)\zeta\rangle)\mathrm{d}X$$

等于 0，除非 ζ 属于 $\mathfrak{n}_{F_\infty}$ 内的一个格 $\mathfrak{n}_{(\frac{1}{N}\mathscr{O}_F)}$。

第二，Schwartz-Bruhat 函数的 Fourier 变换是 Schwartz-Bruhat 函数。据定义，在 F_∞ 上的 Schwartz-Bruhat 函数是急减函数，即对任意 n，有估值

$$\left|\sup_{\gamma\in\Omega}\int_{\mathfrak{n}_\infty} f(y^{-1}\gamma e(X)y)\psi(\langle X,\mathrm{Ad}(a)\zeta\rangle)\mathrm{d}X\right|$$
$$\leqslant 常数|\mathrm{Ad}(a)\zeta|^{-n},$$

连同以上第一点便知，对任一 n，存在N，使得

$$\sup_{\gamma\in\Omega}\sigma_B^g(|\alpha(a)|-T)\sum_{\zeta\in\mathfrak{n}'_F}\left|\int_{\mathfrak{n}_A} f(y^{-1}\gamma e(X)y)\right.$$
$$\left.\times\psi(\langle X,\mathrm{Ad}(a)\zeta\rangle)\mathrm{d}X\right|$$
$$\leqslant 常数\ \sigma_B^g(|\alpha(a)|-T)\Big(\sum_{\zeta\in\mathfrak{n}'_{(\frac{1}{N}\mathscr{O}_F)}}|\mathrm{Ad}(a)\zeta|^{-n}\Big).$$

第三，容易估计

$$\sigma_B^g(|\alpha(a)|-T)\sum_{\zeta\in\mathfrak{n}_{(\frac{1}{N}\mathscr{O}_F)}}|\mathrm{Ad}(a)\zeta|^{-n}$$
$$\leqslant 常数\ \sigma_B^g(|\alpha(a)|-T)|\alpha(a)|^{-n}\Big(\sum_{\frac{1}{N}\mathbf{Z}}|\zeta|^{-n}\Big)^{\deg F}.$$

对 n 足够大，上式内级数收敛．故只需考虑在 $A_\infty^0\cap G_A^1$ 上的积分。这个积分显然不大于常数乘以下式

$$\Big(\int_T^\infty e^{-nt}\mathrm{d}t\Big)^{\deg F}.$$

全定理证毕。 ∎

事实上我们证明了

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathscr{O}}\int_{G_F\backslash G_A^1}|k_{\mathfrak{o}}^T(x,f)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathscr{O}}\int_{G(T)}|K_{G,\mathfrak{o}}(x,x)|\,\mathrm{d}x+O(\mathrm{e}^{-\varepsilon T}).$$

从定理2.1立刻可知$k_{\mathfrak{o}}^T(x,f)$在$G_F\backslash G_A^1$上可积。

定义2.3 $J_{\mathfrak{o}}^T(f)=\int_{G_F\backslash G_A^1}k_{\mathfrak{o}}^T(x,f)\mathrm{d}x$。

当$\mathfrak{o}\in\mathscr{O}(G)$时，$\mathfrak{o}$与$A_F$不相交，故$K_{B,\mathfrak{o}}=0$。于是$J_{\mathfrak{o}}^T(f)$与$T$无关，并且

$$J_{\mathfrak{o}}(f)=\int_{G_F\backslash G_A^1}K_{\mathfrak{o}}(x,x)\mathrm{d}x.$$

事实是每个$\mathfrak{o}\in\mathscr{O}(G)$是$M(2,F)$中的一个$F$的二次扩张的非零元，$\mathfrak{o}$的每一个元都是半单元。设$\gamma\in\mathfrak{o}$。以$G(\gamma)$记$\gamma$在$G$的中心化子。则

$$\sum_{\delta\in\mathfrak{o}}f(x^{-1}\delta x)=\sum_{\delta\in G(\gamma)_F\backslash G_F}f(x^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta x).$$

所以

$$J_{\mathfrak{o}}(f)=\mathrm{vol}(G(\gamma)_F\backslash G_A^1\cap G(\gamma)_A)$$

$$\times\int_{G_A^1\cap G(\gamma)_A\backslash G_A^1}f(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x,$$

上式右边的积分是一个轨道积分。

§3 核的表示分解

令

$$L^2_{\mathrm{cusp}}(G_F\backslash G_A^1)=\left\{\phi\in L^2(G_F\backslash G_A^1:\int_{N_F\backslash N_A}\phi(nx)\mathrm{d}n=0,x\in G_A^1\right\}.$$

可证明存在右正则表示R的直和分解 $L^2_{\mathrm{cusp}}(G_F\backslash G^1_{\mathbb{A}}) = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} L_\chi$.

设μ,ν为$F^\times\backslash\boldsymbol{A}^1$的酉特征标，$\mathscr{H}^0(\mu,\nu)$是由满足以下条件的连续函数$\phi: N_{\mathbb{A}}A_F\backslash G^1_{\mathbb{A}}\to\boldsymbol{C}$所组成的空间：

(1) ϕ是右K有限。

(2) 可以把$F^\times\backslash\boldsymbol{A}^\times$写成$(F^\times\backslash\boldsymbol{A}^1)\times F^0_\infty$，对任意的$x\in G^1_{\mathbb{A}}$，$a,b\in\boldsymbol{A}^1$，$u,v\in F^0_\infty$，有

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a^u & 0\\ 0 & b^v\end{pmatrix}x\right)=\mu(a)\nu(b)(uv^{-1})^{1/2}\phi(x).$$

(3) $\|\phi\|^2=\int_K\int_{A_F\backslash A^1_{\mathbb{A}}}|\phi(ak)|^2\,\mathrm{d}\,a\,\mathrm{d}\,k<\infty$.

以$\mathscr{H}(\mu,\nu)$记$\mathscr{H}^0(\mu,\nu)$的完备化空间，

对$x\in G^1_{\mathbb{A}}$，$\phi\in\mathscr{H}^0(\mu,\nu)$，$s\in\boldsymbol{C}$，Re $s>1/2$。定义Eisenstein级数

$$E(x,\phi,s)=\sum_{\delta\in B_F\backslash G_F}\phi(\delta x)|a|(\delta x)^{s+\frac{1}{2}},$$

其中 $|a|\left[\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}k\right]=\left|\frac{a}{b}\right|_{\mathbb{A}}$。取$s_0$，Re $s_0>\frac{1}{2}$，设

$$\phi^\wedge(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}\,s=s_0}E(g,\phi,s)\mathrm{d}|s|.$$

则$\phi^\wedge\in L^2(G_F\backslash G^1_{\mathbb{A}})$。设$\chi=\{(\mu,\nu),(\nu,\mu)\}$。由这样的$\chi$所组成的集记为$\mathfrak{X}\backslash\mathfrak{X}(G)$。以$L_\chi$记由$\{\phi^\wedge:\phi\in\mathscr{H}^0(\mu,\nu)$或$\mathscr{H}^0(\nu,\mu)\}$所生成的$L^2(G_F\backslash G^1_{\mathbb{A}})$的闭子空间，则

$$L^2_{\mathrm{cusp}}(G_F\backslash G^1_{\mathbb{A}})^\perp=\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}\backslash\mathfrak{X}(G)}L_\chi.$$

这样

$$L^2(G_F\backslash G^1_{\mathbb{A}})=\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}}L_\chi.$$

由此 G_A^1 的右正则表示 R 的积分核可以相应分解：

$$K_G(x,y)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}}K_{G,\chi}(x,y).$$

以 R_B 记 G_A^1 在 $L^2(N_A A_F\backslash G_A^1)$ 上的右正则表示。以 $K_B(x,y)$ 记积分算子 $R_B(f)$ 的核，存在分解

$$L^2(N_A A_F\backslash G_A^1)=\bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}\backslash\mathfrak{X}(G)}L_{B,\chi},$$

其中，若 $\chi=\{(\mu,\nu),(\nu,\mu)\}$,则 $L_{B,\chi}$ 是由 $\mathscr{H}^0(\mu,\nu)\cup\mathscr{H}^0(\nu,\mu)$ 所生成的闭子空间。相应于此分解，K_B 亦可分解为

$$K_B(x,y)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}}K_{B,\chi}(x,y),$$

其中对 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$，我们取 $K_{B,\chi}=0$。

我们继续用上一节的符号，例如我们仍然用 P,P_0,P_1 来记G 或B，除此还以 $\mathfrak{g}^1$ 记 G_∞^1 的李代数。通用包络代数$\mathfrak{A}\left(\mathfrak{g}^1\bigotimes_R C\right)$ 的元X可以看作左不变微分算子 $R(X)$。如果我们要表示对变元 x 求导，我们则用符号 $R_x(X)$。我们还假设积分核 K_B 是用光滑函数 f 定义的。利用 Eisenstein 级数的理论可以证明以下引理。

引理3.1

(1) 对 $Y\in\mathfrak{A}(\mathfrak{g}^1\otimes\mathbf{C})$存在常数 N_0,c，使得

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}}|R_y(Y)K_{P,\chi}(x,y)|\leqslant c\|x\|^{N_0}\|y\|^{N_0}.$$

(2) 取定 $Y\in\mathfrak{A}(\mathfrak{g}^1\otimes\mathbf{C})$ 及 $N\geqslant0$，则存在常数 N',c'，使得

$$\sum_{\gamma\in P_F\backslash G_F}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}}|R_y(Y)K_{P,\chi}(\gamma x,y)|$$
$$\leqslant c'\|x\|^{N'}\|y\|^{N'}$$
$$\times\sup_{u\in G_A^1}\left(\sum_{\chi\in\mathfrak{X}}|R_y(Y)K_{P,\chi}(u,y)|\cdot\|u\|^{-N}\right).$$

如上章，我们引入截算子。对 $T>0$ 及 $P_F\backslash G_A^1$ 上的连续函数 ϕ，我们设

$$(\Lambda^{T,P}\phi)(x)=\sum_{\{P_1:B\subset P_1\subset P\}}(-1)^{\dim(A_{P_1}/A_P)}$$

$$\times\sum_{\delta\in P_{1,F}\backslash P_F}\int_{N_{P_1,F}\backslash N_{P_1,A}}\phi(n\delta x)\mathrm{d}n$$

$$\times\tau_{P_1}^P(|a(\delta x)|-T).$$

显然 $\Lambda^{T,G}$ 是第五章§2的 Λ^T 即

$$\Lambda^{T,G}\phi(x)=\phi(x)-\sum_{\delta\in B_F\backslash G_F}\int_{N_F\backslash N_A}\phi(n\delta x)\mathrm{d}n$$

$$\times\tau_B(|a(\delta x)|-T).$$

同时亦易见

$$\Lambda^{T,B}\phi(x)=\int_{N_F\backslash N_A}\phi(nx)\mathrm{d}n.$$

显然有

引理3.2 如果 $T>0$ 及 ϕ 是 $P_F\backslash G_A^1$ 上的连续函数，则

$$\sum_{\{P_1:B\subset P_1\subset P\}}\sum_{\delta\in P_{1,F}\backslash P_F}\Lambda^{T,P_1}\phi(\delta x)\tau_{P_1}^P(|a(\delta x)|-T)$$

$$=\int_{N_F\backslash N_A}\phi(nx)\mathrm{d}n. \quad \blacksquare$$

以下引理是一个有用的估值工具。

引理3.3 设 $\mathfrak{S}$ 是 G_A^1 内的 Siegel 集。对任意正数 N' 和 N，及 G_{A_f} 的任一紧开子群 K_0，则可以在 $\mathfrak{A}\left(\mathfrak{g}^1\bigotimes_R C\right)$ 内找一个满足以下条件的有限集 $\{X_i\}$：设有测度空间 $(S,\mathrm{d}\sigma)$ 及可测函数：

$$\phi:S\to C^\infty(G_F\backslash G_A^1/K_0),$$

则以下估计对任意 $x\in\mathfrak{S}$ 成立：

$$\int_S|\Lambda^T\phi(\sigma,x)|\mathrm{d}\sigma$$

$$\leqslant \sum_i \sup_{y \in G_A^1} \left(\int_B |R(X_i)\phi(\sigma,y)| \mathrm{d}\sigma \cdot \|y\|^N \right) \cdot \|x\|^{-N'}.$$

证明从略。

定义3.1 对 $T>0$ 和 G_A^1 上有紧支集的光滑函数 f，设

$$k_\chi^T(x,f) = k_{G,\chi}(x,x) - \sum_{\delta \in B_P \setminus G_P} K_{B,\chi}(\delta x, \delta x)\tau(|\alpha(\delta x)| - T).$$

上式右边亦可写为

$$\sum_P (-1)^{\dim(A/Z)} \sum_{\delta \in B_P \setminus G_P} K_{B,\chi}(\delta x, \delta x)\tau(|\alpha(\delta x)| - T).$$

我们先证明几个引理：

引理3.4 我们用 $\Lambda_2^{\cdot,\cdot}$ 来记截算子 $\Lambda^{\cdot,\cdot}$ 对跟着的函数的第二个变量的作用。则

$$k_\chi^T(x,f) = \Lambda_2^{T,G} K_{G,\chi}(x,x) + \sum_{\delta \in B_P \setminus G_P} \tau(|\alpha(\delta x)| - T)\{T_2^{T,B} K_{G,\chi}(\delta x, \delta x) - \Lambda_2^{T,B} K_{B,\chi}(\delta x, \delta x)\}.$$

证 上式右边可以写成

$$\sum_{\{P_1, P_2 : P_0 \subset P_1 \subset P_2\}} \sum_{\delta \in P_{1,F} \setminus G_F} \sigma_1^2(H(\delta x) - T) \times \left\{ \sum_{\{P : P_1 \subset P \subset P_2\}} (-1)^{\dim(A_P/Z)} \times \Lambda_2^{T,P_1} K_{P,\chi}(\delta x, \delta x) \right\}.$$

因为

$$\sigma_1^2(H) = \sum_{\{P_3 : P_3 \supset P_2\}} (-1)^{\dim(A_{P_2}/A_{P_3})} \tau_1^3(H)\tau_3(H),$$

所以便得

$$\sum_{\{P_1\subset P\subset P_2\subset P_3\}}\sum_{\delta\in P_{1,F}\setminus G_F}(-1)^{\dim(A_{P_2}/A_{P_3})}\tau_3(H(\delta x)-T)$$
$$\times\tau_1^3(H(\delta x)-T)(-1)^{\dim(A_P/Z)}\Lambda_2^{T,P_1}K_{P,\chi}(\delta x,\delta x).$$

因为

$$\sum_{\{P:P_1\subset P\subset P_2\}}(-1)^{\dim(A_P/A_{P_2})}=\begin{cases}1, & 若 P_1=P_2,\\ 0, & 若 P_1\neq P_2,\end{cases}$$

所以$\sum_{P_2}=0$，除非$P=P_3$。故得

$$\sum_{\{P_1,P:P_0\subset P_1\subset P\}}(-1)^{\dim(A_P/Z)}\sum_{\delta\in P_{1,F}\setminus G_F}\tau_P(H(\delta x)-T)$$
$$\times\tau_{P_1}^P(H(\delta x)-T)\Lambda_2^{T,P_1}K_{P,\chi}(\delta x,\delta x).$$

因为

$$\sum_{\{P_1:P_0\subset P_1\subset P\}}\sum_{\delta\in P_{1,F}\setminus P_F}\Lambda^{T,P_1}\phi(\delta x)\tau_1^P(H(\delta x)-T)$$
$$=\int_{N_F\setminus N_A}\phi(nx)\mathrm{d}n.$$

故得

$$\sum_{\{P:P_0\subset P\}}(-1)^{\dim(A/Z)}\sum_{\delta\in P_F\setminus G_F}\tau_P(H(\delta x)-T)$$
$$\times\int_{N_F\setminus N_A}K_{P,\chi}(\delta x,n\delta x)\mathrm{d}n.$$

因为对$n\in N_A$，$K_{P,\chi}(\delta x,n\delta x)=K_{P,\chi}(\delta x,\delta x)$及

$$\int_{N_F\setminus N_A}\mathrm{d}n=1,$$

故得

$$\sum_{\{P\}}(-1)^{\dim(A/Z)}\sum_{\delta\in P_F\setminus G_F}K_{P,\chi}(\delta x,\delta x)\tau(H(\delta x)-T).$$

这便是$k_\chi^T(x,f)$。 ▎

对 $P_1 \subset P_2$，设

$$\Gamma(P_1,P_2)=\{\gamma\in P_{1,F}\backslash P_{2,F}: P_1\subset P\subsetneqq P_2 \Longrightarrow \gamma\notin P_{1,F}\backslash P_F\}.$$

引理3.5 以下等式成立：

$$k_\chi^T(x,f)=\Lambda_2^{T,G}K_{G,\chi}(x,x)+\sum_{\delta\in B_F\backslash G_F}\tau(|a(\delta x)|-T)$$

$$\times\sum_{1\neq\gamma\in B_F\backslash G_F}\Lambda_2^{T,B}K_{B,\chi}(\gamma\delta x,\delta x).$$

证 设 $P_1\subset P\subset P_2$。按定义

$$K_P(x,y)=\sum_{\gamma\in M_P}\int_{N_A}f(x^{-1}\gamma n y)\mathrm{d}n.$$

把上式中 M_P 的和拆开为对 $N_{1,F}.M_{1,F}$ 及 $P_{1,F}\backslash P_F$ 求和，则

$$\int_{N_{1,F}\backslash N_{1,A}}K_P(x,ny)\mathrm{d}n=\sum_{\gamma\in P_{1,F}\backslash P_F}K_{P_1}(\gamma x,y).$$

利用几何引理(§2)，便得

$$\sum_{\{P:\,P_1\subset P\subset P_2\}}(-1)^{\dim(A_P/A_{P_2})}\int_{N_{1,F}\backslash N_{1,A}}K_P(x,ny)\mathrm{d}n$$

$$=\sum_{\gamma\in\Gamma(P_1,P_2)}K_{P_1}(\gamma x,y).$$

如果 $B\subset P_0\subset P_1$，则 $N_{P_0}\supset N_{P_1}$，所以

$$\Lambda_2^{T,P_1}\int_{N_{1,F}\backslash N_{1,A}}K_P(x,ny)\mathrm{d}n=\Lambda_2^{T,P_1}K_P(x,y).$$

因为

$$(-1)^{\dim(A_P/A_{P_2})}=(-1)^{\dim(A_P/Z)}(-1)^{\dim(A_{P_2}/Z)},$$

所以

$$\sum_{\{P:\,P_1\subset P\subset P_2\}}(-1)^{\dim(A_P/Z)}\Lambda_2^{T,P_1}K_{P,\chi}(x,y)$$

$$=(-1)^{\dim(A_{P_2}/Z)}\sum_{\gamma\in\Gamma(P_1,P_2)}\Lambda_2^{T,P_1}K_{P_1,\chi}(\gamma x,y).$$

现在应用引理3.4即知$k_\chi^T(x,f)$等于

$$\sum_{\{P_1,P_2:\ B\subset P_1\subset P_2\}}\ \sum_{\delta\in P_{1,F}\setminus G_F}\sigma_1^2(|a(\delta x)|-T)$$

$$\times\left\{(-1)^{\dim(A_{P_2}/Z)}\sum_{\gamma\in\Gamma(P_1,P_2)}\Lambda_2^{T,P_1}K_{P_1,\chi}(\gamma x,y)\right\}. \blacksquare$$

定理3.6 如果T充分大，则

$$\sum_{\chi\in X}\int_{G_F\setminus G_A^1}|k_\chi^T(x,f)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

证 由于引理3.5，我们需要对

$$\sum_\chi\sum_\gamma\Lambda_2^{T,P_1}K_{P_1,\chi}(\gamma x,y)$$

作出估计.（可以证明任意固定的x,y，存在$\Gamma(P_1,P_2)$的有限子集Γ'，使得Γ'与χ无关，及当$\gamma\in\Gamma(P_1,P_2)$时，$K_{P_1,\chi}(\gamma x,y)=0$，除非$\gamma\in\Gamma'$。）当$P_1=G$时我们取$\Omega=1$和$\mathfrak{S}=G_A^1$的Siegel集，使得$G_F\mathfrak{S}=G_A$。当$P_1=B$时我们取$\Omega$为$N_A$的紧子集，使得$N_F\Omega=N_A$；取$\mathfrak{S}$为$A_A^1$的子集，使得$A_F\mathfrak{S}=A_A^1$。在以下的计算中$n\in\Omega$，$m\in\mathfrak{S}\cap B_A$，$a\in(A_{P_1})_\infty^0\cap G_A^1$，$k\in K$。

设$\mathfrak{m}_1^1$为$(M_{P_1})_\infty^1$的李代数。对任意正整数N_1和N_1'，应用引理3.3，我们可以找出$\mathfrak{A}(\mathfrak{m}_1^1\otimes\boldsymbol{C})$的有限子集$\{X_i\}$，使得对$\tilde{m}\in\mathfrak{S}$，

$$\sum_{\gamma\in\Gamma(P_1,P_2)}\sum_{\chi\in X}|\Lambda_2^{T,P_1}K_{P_1,\chi}(\gamma nmak,\tilde{m}ak)|$$

$$\leqslant\sum_i\sup_{u\in(M_1)_A^1}\Big(\sum_\gamma\sum_\chi|R_u(X_i)$$

$$\times K_{P_1,\chi}(\gamma nmak,uak)\cdot\|u\|^{-N_1}\Big)\cdot\|\tilde{m}\|^{-N_1'}.$$

可以在$\mathfrak{A}(\mathfrak{g}^1\otimes\boldsymbol{C})$中找有限子集$\{Y_i\}$及$K$上连续函数$c_{ij}$，使得

$$\mathrm{Ad}(ak)^{-1}X_j=\mathrm{Ad}(k)^{-1}X_j=\sum_j c_{ij}(k)Y_j.$$

于是在上不等式中的微分可作变换 $u \mapsto u(ak)^{-1}$。然后利用引理3.1作估值：存在常数 c_1, N_2', N_2，使得

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(P_1, P_2)} \sum_{\chi \in X} |R_\gamma(Y) K_{P_1, \chi}(\gamma x, y)| \leqslant c_1 \|x\|^{N_2} \|y\|^{N_2'}.$$

所以只要取 N_1 充分大便得常数 c_2, N_2，使得

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(P_1, P_2)} \sum_{\chi \in X} |\Lambda_2^{T, P_1} K_{P_1, \chi}(\gamma nmak, \tilde{m}ak)| \leqslant c_2 \|m\|^{N_2} \|a\|^{N_2} \|\tilde{m}\|^{-N_1'}.$$

这是第一个估计。

利用引理3.5，我们知道

$$\sum_{\chi} \int_{G_F \backslash G_A^1} |k_\chi^T(x, f)| \mathrm{d}x$$

不大于

$$\sum_{\{P_1, P_2: B \subset P_1 \subset P_2\}} \int_{P_{1,F} \backslash G_A^1} \sum_{\chi \in X} \sum_{\gamma \in \Gamma(P_1, P_2)} \{\sigma_1^2(|a(x)| - T) \times |\Lambda_2^{T, P_1} K_{P_1, \chi}(\gamma x, x)|\} \mathrm{d}x.$$

上式对 $P_{1,F} \backslash G_A^1$ 上的积分可以化为以下函数

$$\mathrm{e}^{-2\rho_{P_1}(a)} \sigma_1^2(|a(a)| - T) \times \sum_{\chi} \sum_{\gamma} |\Lambda_2^{T, P_1} K_{P_1, \chi}(\gamma nmak, mak)|$$

（其中 $\rho_G = 0, \rho_B = a/2$）对 $n \in \Omega, m \in \mathfrak{S} \cap B_A, a \in (A_{P_1})_\infty^0 \cap G_A^1$，$k \in K$ 等变元的积分。利用前面的第一个估计便知有常数 c_3, N_3，使得在 $P_{1,F} \backslash G_A^1$ 上的积分不大于

$$c_3 \int_{\mathfrak{S}} \|m\|^{N_3 - N_1'} \mathrm{d}\, m.$$

由于 N_1' 是任意的，故只需取 $N_1' = N_3$ 便知此积分有限。于是定理证毕。 ▎

从以上定理可知 $k_\chi^T(x,f)$ 可积。

定义3.2 $J_\chi^T(f) = \int_{G_F\backslash G_A^1} k_\chi^T(x,f)\mathrm{d}x$。

引理3.7 如果 T 充分大，则

$$J_\chi^T(f) = \int_{G_F\backslash G_A^1} \Lambda_2^T K_\chi(x,x)\mathrm{d}x.$$

证 从引理3.5可见只需证明下式等于0：

$$\int_{B_F\backslash G_A^1} \tau(|\alpha(x)|-T) \sum_{1\neq\gamma\in B_F\backslash G_F} \Lambda_2^{T,B}K_{B,\chi}(\gamma x,x)\mathrm{d}x.$$

用Bruhat分解 $G_F = B_F \bigcup B_F w N_F$，得

$$\int_{B_F\backslash G_A^1} \tau(|\alpha(x)|-T) \sum_{\gamma\in N_F} \Lambda_2^{T,B}K_{B,\chi}(w\gamma x,x)\mathrm{d}x.$$

对 $\gamma\in N_F$，$|\alpha(\gamma x)| = |\alpha(x)|$，故此得

$$\int_{B_F\backslash G_A^1} \tau(|\alpha(x)|-T)\Lambda_2^{T,B}K_{B,\chi}(wx,x)\mathrm{d}x.$$

但

$$K_B(wx,x) = \sum_{\gamma\in A_F}\int_{N_A} f((wx)^{-1}\gamma nx)\mathrm{d}n,$$

而 f 有紧支集。即存在由 f 决定的常数 c'，使得 $K_B(wx,x)=0$，除非

$$|\alpha((wx)^{-1}\gamma nx)| < c'.$$

因为 $\gamma\in A_F \Rightarrow |\alpha(\gamma)| = 1$(product formula)。$n\in N_A \Rightarrow |\alpha(n)| = 1$。故有常数 c，使得 $K_B(wx,x)=0$，除非

$$|\alpha(x)| - |\alpha(wx)| < c.$$

但 $\tau(|\alpha(x)|-T)=0$，除非 $|\alpha(x)|>T$。所以当 T 充分大时，便与 $|\alpha(x)|-|\alpha(wx)|<c$ 矛盾，即必有 $K_{B,\chi}(wx,x)=0$。故所算的积分应等于0。∎

§4 迹 公 式

我们把积分算子 $R(f)$的核$K(x,y)$用两种不同的方法分解，于是

$$\sum_{\mathfrak{o}} K_{\mathfrak{o}}(x,y) = K(x,y) = \sum_{\chi} K_{\chi}(x,y).$$

为了保证可积性，我们对积分核左右两边作同样的修改，于是

$$\sum_{\mathfrak{o}} k_{\mathfrak{o}}^T(x,f) = \sum k_{\chi}^T(x,f).$$

由定理2.1及3.6保证了收敛性，故得以下定理：

定理4.1(迹公式) $\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \sum_{\chi\in\mathfrak{X}} J_{\chi}^T(f).$

我们以R_{cusp}记$G_{\mathbb{A}}^1$在尖形式空间 $L_{\mathrm{cusp}}^2(G_F\backslash G_{\mathbb{A}}^1)$上的右正则表示。对光滑函数$f$,$R_{\mathrm{cusp}}(f)$是迹类算子。而由定理4.1得$R_{\mathrm{cusp}}(f)$的迹是

$$\mathrm{trace} R_{\mathrm{cusp}}(f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(f) - \sum_{\chi\overline{\in}\mathfrak{X}(G)} J_{\chi}^T(f).$$

这便是常见的迹公式。

后　　记

在这里我们将讨论前面各章的一些定理在既约群情形时的结果。我们的重点在介绍近年来的部分文献。

Artin, Tate[1], Heilbronn, Weil[1], Deligne[3] 讨论L函数理论。

关于GL(2)的Hecke理论可看Jacquet-Langlands, Gelbart[1]; GL(3)的Hecke理论可看Jacquet-Shalika[1], Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika[1]; 关于GL(n)的理论可看Godement-Jacquet.

Langlands[7]首先提出一系列关于自守形式的L函数的猜想。Godement[2]; Borel[3](Ⅲ, 374—398, 562—596); Gelbart[3]均是综述Langlands计划的好文章。Langlands关于Artin猜想的工作可看Gelbart[2]。关于Tate猜想可看Tate[2]; Langlands-Hardor-Rapoport; Lai[3]; Klingenberg; Stuhler. Lai[1] 谈椭圆曲线的Weil猜想。Deligne[1], [2]证明Ramanujan猜想。

Harish-Chandra[3] (Ⅲ, 649—666; Ⅳ, 21—43), Varadarajan[1] 和 Wallach, Schmid[2] 是几篇介绍半单实李群的无限维表示理论的综述性文章，目前这方面最好的教科书是Knapp 和 Vogan. Knapp是从解析理论的角度来处理李群调和分析。Vogan则讨论代数方法，如第一章中的($\mathfrak{g}$, K)模 理论. 实李群的表示分类由 Langlands[9]解决。与这问题有关的“L不可分别”理论可看 Shelstad.

二

Cartier[1],[2]综述p进既约群的无限维表示理论近年来的进展。关于典型群的p进表示理论可看Bruhat[1],[2],[3]; Mautner[1],[2]; Shalika; Tanaka; Silberger[1],[2]; Shintani。p进GL(2)的表示的结构由Bernshtein-Zelevinskii[1],[2],[3]; Howe[1]; Carayol详细提出。Silberger[3]证明了p进群的Langlands商定理。Macdonald; Satake; Harish-Chandra[2]; Jacquet[6], Silberger[4]详细的介绍p进群的无限维表示理论。Harish-Chandra关于p进群表示的工作是在Harish-Chandra[3](Ⅳ,356—446)。关于p进群的无限维表示与Galois群的表示的对应(即所谓"局部Langlands猜想")的工作可参看Tunnell; Kutzko[2]; Kutzko-Moy; Koch[2]; Henniart。

三

设G为代数群，G定义在代数数域F上，$\mathbf{A}$为F的Adele环，$\mathscr{H}$为$G_{\mathbf{A}}$的Hecke代数，$\mathscr{A}$为$G_{\mathbf{A}}$上的自守形式空间，我们称$\mathscr{H}$的一个不可约表示π为自守表示，如果π等价于$\mathscr{H}$的一个在$\mathscr{A}$上的表示的子商。我们说连续$G_{\mathbf{A}}$模V为自守模，如果V内的可容许向量所生成的子空间定义出$\mathscr{H}$的自守表示。关于自守表示的讨论可看Borel[3](Ⅲ，548—561), Langlands[7],[12],[13]。

F是代数数域，$\mathbf{A}$是F的Adele环，ψ是$F^{\times}\backslash\mathbf{A}^{\times}$的酉特征标，$G=\mathrm{GL}(2)/F$，$Z$是$G$的中心，要求$G_F\backslash G_{\mathbf{A}}$上的可测复值函数$\phi$满足以下条件：

(1) $\phi(zg)=\psi(z)\phi(g)$，$z\in Z_{\mathbf{A}}$，$g\in G_{\mathbf{A}}$，

(2) $\displaystyle\int_{Z_{\mathbf{A}}G_{\mathbf{A}}\backslash G_{\mathbf{A}}}|\phi(g)|^2dg<\infty$。

由以上函数所生成的 Hilbert 空间记为$L^2(G_F\backslash G_A,\psi)$。$G_A$在这个空间上的右平移表示记为$R^\psi$。以$R$记$G_A$在$L^2(G_F\backslash G_A)$的右正则表示。则

$$R=\int_{(F^\times\backslash A^\times)^*}^{\oplus} R^\psi \mathrm{d}\psi,$$

$$R^\psi=\left(\bigoplus_j \pi^j\right)\oplus\int^{\oplus}\pi^s \mathrm{d}s,$$

其中积分是有连续参数的一组表示$\{\pi^s\}$的直积分（见：Dixmier[1]），而Hilbert 直和$\bigoplus_j \pi^j$是由$L^2(G_F\backslash G_A,\psi)$中的常数及尖形式生成.以上的分解在SL(2,$\boldsymbol{R}$)时可看Langlands[3]；Godement[3]；Lang；Kubota。以R_0^ψ记R^ψ限制在尖形式上的表示。则可证明所谓“重数 1”定理：任意不可约表示只在R_0^ψ出现一次（见 Gelbart[1]）。另外又有所谓“强重数 1”定理：如果$\pi=\bigotimes_v \pi_v$和$\pi'=\bigotimes_v \pi'_v$均在R_0^ψ中出现，并且对有限个赋值v,π_v与π'_v等价，则π与π'等价（见 Miyake；Casselman[7]；GL(n)时 见 Jacquet-Shalika[3]。）

四

Gauss 的 算术教科书开始了二元二次形的约化理论。现代人研究这个理论是 由 Siegel(Ⅲ，275—327)开始。最一般的结果在 Harish-Chandra[3](Ⅲ，127—177)。两本 教 科 书 是 Borel[2]；Humphreys。Platonov 是一篇综述性论文。

关于 Adele 群可看 Weil[4]；Borel[3](Ⅱ,305—330)。

Borel[3](Ⅱ，638—696；Ⅲ，548—561)讨 论一般的自守形式的理论，是一个很好的导论．关于自守形式的有理性问题可看

Harris 及 Garret 两人的工作。

自守形式的教科书有Ogg；Schoereberg；Baily；Shimura[1]；Freitag；Christian[7]；Gelfand-Graev-Pyatetskii-Shapiro。

五

Weil[5]介绍Eisenstein级数与Eisenstein的工作。现在的单变量Eisenstein级数理论是 Selberg 在五十年代所发展的。但他一直没有发表。Kubota 就是谈Selberg这些关于 $SL(2,\boldsymbol{R})$的 Eisenstein级数的结果。如果半单代数群G的秩是 1，则$G_{\mathbf{R}}$的 Eisenstein级数还是单变量；Harish-Chandra[1]和Langlands[2]都讨论这些级数。Langlands[2] 在第七章中提出 了 Eisenstein system 的理论，以解决既约实李群的多变量 Eisenstein 级 数的解析延拓与函数方程的问题。在Langlands[2]的附录Ⅱ中他简述了Adele群的Eisenstein 级数的理论。但是，到目前还是没有文献详细介绍代数数域的Adele群的Eisenstein级数理论。Shimura和他的学生们近年来详细地研究典型群的Eisenstein级数，尤其讨论 Eisenstein 级数在特殊点的值或在特殊极点的残数是否是代数数。

六

在1956 年 Selberg[1]发表了以下的现在称为 Selberg 迹公式(没有发表证明)：称$PSL(2,\boldsymbol{R})$的元 γ 为双曲元，若γ与$\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$共轭，$\rho>1$。称$\rho$为$\gamma$的范数，将它记为$N\{\gamma\}$。设$\Gamma$ 为 $PSL(2,\boldsymbol{R})$的离散子群。称双曲元$\gamma\in\Gamma$为本原双曲元，若不存在$\gamma_1\in\Gamma$，使$\gamma=\gamma_1^m$, $m>1$。把$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\gamma\in\Gamma$看作上半平面 $\mathfrak{h}=\{z=x+iy:y>0\}$的Möbius变换，即 $\gamma z=\dfrac{az+b}{cz+d}$. 对这个作用取 基 本 集$\mathscr{D}$，即 $\mathfrak{h}=$

$\Gamma\mathscr{D}$。假若：(1) $\mathscr{D}$为紧黎曼面；(2) Γ在$\mathfrak{h}$中无固定点，则对适当的复变函数h，Selberg 迹公式便是：

$$\sum_n h(r_n) = \frac{A(\mathscr{D})}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} r\frac{e^{\pi r}-e^{-\pi r}}{e^{\pi r}+e^{-\pi r}}h(r)dr$$

$$+2\sum_{\{\gamma\}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\log N\{\gamma\}}{(N\{\gamma\})^{k/2}-(N\{\gamma\})^{-k/2}}\right.$$

$$\left.\times g(k\log N\{\gamma\})\right),$$

其中r_i是由$\mathscr{D}$上的 Laplace 算子的特征根决定,即

$$y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F = -\left(\frac{1}{4}+r^2\right)F,$$

$A(\mathscr{D})$是$\mathscr{D}$的 面积，$\sum_{\{\gamma\}}$是对本原双曲共轭类求和，对$u\in \mathbf{R}$定义

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iru}h(r)dr.$$

请注意，在上面的迹公式中左边决定Laplace算子的特征根r_i的渐近分布，而右边决定Γ 中的本原双曲共轭类的范数的渐近分布。模仿解析数论中的黎曼ζ函数，Selberg定义以下 的 zeta 函数：

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{\{\gamma\}}\prod_{k=0}^{\infty}(1-(N\{\gamma\})^{-s-k}).$$

利用它的迹公式，Selberg 证 明 了这个函数的基本性质，例如：

(1) $Z_\Gamma(s)$满足以下函数方程

$$Z_\Gamma(s) = \exp\left\{A(\mathscr{D})\int_0^{s-\frac{1}{2}} v\tan\pi v dv\right\}Z_\Gamma(1-s).$$

(2) $Z_\Gamma(s)$的黎曼假设是正确的。

假如$A(\mathscr{D})<\infty$，而$\mathscr{D}$是非紧的。则算子 $y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$有连续谱。利用Eisenstein级数理论，Selberg证明了迹公式。如果Γ只有一个尖点，Γ在$\mathfrak{h}$中没有固定点，则迹公式是

$$\sum_{n} h(r_n) = \frac{A(\mathscr{D})}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r \frac{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}} h(r) dr$$

$$+ 2\sum_{\{\gamma\}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\log N\{\gamma\}}{(N\{\gamma\})^{k/2} - (N\{\gamma\})^{-k/2}} \times g(k\log N\{\gamma\}) \right)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \frac{\phi'}{\phi}\left(\frac{1}{2} + ir\right) dr$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1 + ir) dr$$

$$- 2g(0)\log 2 \quad + \frac{1}{2}\left(1 - \phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) h(0),$$

其中

$$\phi(s) = \frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{\substack{c \neq 0 \\ 0 \leq d < |c| \\ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma}} \frac{1}{|c|^{2s}}.$$

利用上述迹公式Selberg[1]又算出Hecke算子的迹。(关于Hecke算子的迹的计算可参看 Eichler; Ponomarev; Oesterlé; Shimizu; Shimura。)

以上的Selberg迹公式的详细讨论在Hejhal可以找到。但这部书的篇幅太大，不适宜作教科书。近年来有好些在解析数论的工作都用上了Selberg 迹公式，比如Iwaniec 的工作。

Selberg迹公式与一对群(G,Γ)有关(其中Γ是G的离散子群)。Selberg 所讨论的是 $G=\mathrm{PSL}(2,\boldsymbol{R})$的情形。现在假设$G$是交换局部紧拓扑群，$\Gamma$是$G$的离散子群，使得$G/\Gamma$是紧齐性空间。可在$G$上取Haar测度，便得$G/\Gamma$的体积是1。以$\hat{G}$记$G$的对偶群($\hat{G}$的元是$G$的连续酉特征标)，取$\hat{\Gamma}=\{\omega\in\hat{G}:\omega|_{\Gamma}=1\}$。则$\hat{\Gamma}$是$\hat{G}$的离散子群，而且$\hat{G}/\hat{\Gamma}$是紧齐性空间。设$f$是$G$上连续可积函数，$f$

的 Fourier 变换是

$$\hat{f}(\omega)=\int_G f(x^{-1})\omega(x)\mathrm{d}x.$$

对适当的函数 f，以下的 Poisson 求和公式成立

$$\sum_{\omega\in\Gamma_*}\hat{f}(\omega)=\sum_{\gamma\in\Gamma}f(\gamma).$$

容易看出，这个数论中强有力的工具是 Selberg 迹公式的特殊情形。事实上我们不必假设 G 是交换群。Tamagawa 证明了以下的 Selberg 迹公式：设 Γ 为任意局部紧拓扑群 G 的离散子群，使得 G/Γ 为紧齐性空间。如果 X 是拓扑测度空间，令 $C_c(X)$ 是 X 上的有紧支集的连续函数空间，$L^2(X)$ 是 X 上的二次可积函数空间。对 $f\in C_c(G)$，利用卷积定义 $L^2(G/\Gamma)$ 上的紧积分算子如下：f，$g\in L^2(G/\Gamma)$，

$$\begin{aligned}f*g(x)&=\int_G f(xy^{-1})g(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{G/\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}f(x\gamma y^{-1})g(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{G/\Gamma}K_f(x,y)g(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中

$$K_f(x,y)=\sum_{\gamma\in\Gamma}f(x\gamma y^{-1})$$

是连续函数。以 $\mathscr{K}_f(g)$ 记 $f*g$，则 K_f 便是积分算子 $\mathscr{K}_f$ 的核。设 K 为 G 的极大紧子群。如果 ω 是正定带球函数，则对 $k,k'\in K$，

$$\omega(kgk')=\omega(g),\quad g\in G.$$

若 $f\in C_c(K\backslash G/K)$，则定义 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega)=\int_G f(x^{-1})\omega(x)\mathrm{d}x.$$

设

$$m(\omega)=\{\phi\in C(K\backslash G/\Gamma):f*\phi=\hat{f}(\omega)\phi,$$
$$\forall f\in C_c(K\backslash G/K)\},$$

则可以证明：存在 ω_n，使得

$$L^2(K\backslash G/\Gamma)=\bigoplus_n m(\omega_n).$$

在$m(\omega_\nu)$取标准正交基 $\phi_1^{(\nu)},\cdots,\phi_{m_\nu}^{(\nu)}$。这样便得

$$K_f(x,y)=\sum_{i=0}\hat{f}(\omega_i)\sum_{j=1}^{m_i}\phi_j^{(i)}(x)\ \overline{\phi_j^{(i)}(y)}.$$

于是算子$\mathscr{K}_f$的迹便是

$$\operatorname{tr}\mathscr{K}_f=\int_{G/\Gamma}K_f(x,x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{\infty}m_i\hat{f}(\omega_i).$$

另一方面，设

$$G_\gamma=\{x\in G:x\gamma=\gamma x\},\qquad \Gamma_\gamma=G_\gamma\cap\Gamma.$$

以$\{\gamma\}$记γ的共轭类，则

$$\{\gamma\}=G/G_\gamma.$$

显然，$F_\gamma(\bar{x})=f(x\gamma x^{-1})$是定义在$G/G_\gamma$上的函数。作计算：

$$\int_{G/\Gamma}K_f(x,x)\mathrm{d}x=\int_{G/\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}f(x\gamma x^{-1})\mathrm{d}x$$
$$=\int_{G/\Gamma}\sum_{\{\gamma\}}\sum_{a\in\{\gamma\}}f(xax^{-1})\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{\{\gamma\}}\int_{G/G_\gamma}F_\gamma(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}\cdot\int_{G_\gamma/\Gamma_\gamma}\mathrm{d}x.$$

这样我们比较两个计算迹 $\operatorname{tr}\mathscr{K}_f$ 的结果便立刻得到以下的Selberg迹公式：

$$\sum_{i=0}^{\infty}m_i\hat{f}(\omega_i)=\sum_{\{\gamma\}}\operatorname{vol}(\Gamma_\gamma/\Gamma_\gamma)\int_{G/G_\gamma}F_\gamma(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}.$$

这个公式显然推广了 Poisson 求和公式。

但是如果我们减弱假设，只要求 G/Γ 的体积是有限的，则问题就复杂多了.（上面 Selberg 的第二个迹公式就比第一个迹公式

复杂.)自然会问，如果把 Selberg 所处理的迹公式中(PSL(2,R)，Γ)换为(G,Γ)，G 是任意既约代数群，则高维的迹公式是怎样的？Arthur [1] 首先解决了任意既约群的迹公式问题。在随后的一系列文章中，Arthur 把他的迹公式的每一项作出明显的计算。一方面，Langlands 的函性原则(Functoriality principle)说可以用迹公式比较不同的群的调和分析，另一方面，如引言中所提及，用迹公式来比较代数簇的 L 函数和自守 L 函数，在这两方面的需要下，人们发展了所谓 "stable twisted trace formula"。这方面的结果可在将发表的 IAS (Princeton) Trace formula seminar of Langlands 1984 中看到。最后，我们指出 Jacquet-Lai 从另外一个角度发展了相对迹公式。

参考文献

这个参考文献只包括近年来与自守形式和表示论有关的部分文献。在美国数学学会所出版的Reviews in Number Theory (1940—1972, edited by W. V. LeVcgue, 1973—1983, edited by R. K. Guy) 中可以找到比较详尽的关于自守形式的文献。

Adleman L. M. and Heath-Brown D. R.

The first case of Fermat's last theorem, *Inv. Math.*, 79(1985), 409—416.

Andrianov A. N.

[1] Siegel forms and zeta functions, *Trudy Steklov Inst.*, 132 (1973), 149—154.

[2] Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2, *Uspekhi Math. Nauk*, 29: 3 (1974), 43—110.

Arthur J.

[1] A trace formula for reductive groups I, terms associated to classes in $G(Q)$, *Duke Math. J.* 45(1978), 911—952; II, applications of a truncation operator, *Comp. Math.* 40 (1980), 87—121.

[2] The Selberg trace formula for groups of F-rank one, *Ann. of Math.*, 100 (1974), 326—385.

[3] The trace formula in invariant form, *Ann. of Math.*, 113 (1981), 1—74.

[4] Eisenstein series and the trace formula, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 33, part 1, Amer. Math. Soc., Providence R. I. (1979), 253—274.

[5] On the inner produot of truncated Eisenstein series, *Duke Math. J.*, 49 (1982), 35—70.

[6] On a family of distributions obtained from Eisenstein series I, Application of the Paley-Wiener theorem, *AJM*, 104(1982), 1243—1288.

[7] On a family of distributions obtained from Eisenstein series I, Explicit formulas, *AJM*, 104 (1982), 1289—1336.

[8] The characters of discrete series as orbital integrals, *Inv. Math.*, 32 (1976), 205—261.

[9] A measure on the unipotent variety, *Canadian J. Math.*, 37 (1985), 1237—1274.

[10] A Paley-Wiener theorem tor reai reductive groups, *Acta Math.*, 158 (1983), 1—89.

Artin E.

Uber eine neue Art von L-Reihen, *Hamb. Abh.*, 3 (1923), 89—108.

Atiyah M. and Schmid W.

A geometric construction of discrete series for semisimple Lie groups, *Inv. Math.*, 42 (1977), 1—62.

Atkin A. O. L. and Lehner J.

Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, *Math. Ann.*, 185 (1970), 134—160.

Averbuch V.

Remark on the definition of an automorphic form, *Comp. Math.*, 59 (1986), 3—13.

Baily W. L., Jr.

Introductory lectures on automorphic forms, Princeton University Press, 1973.

Bargmann V.

Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Ann. of Math.*, 48 (1947), 568—640.

Bernshtein I. N.

All reductive p-adic groups are tame, *Functional Anal. Appl.*, 8 (1974), 91—93.

Bernshtein I. N. and Zhelevinskii A. V.

[1] Representations of the group GL (n, F), *Uspchi Mat. Nauk*, 31 (3) (1976), 5—70 = Russian Math. Surveys 31 (3) (1976), 1—68.

[2] Induced representations of the group GL (n) over a p-adic field, *Functional Anal. Appl.*, 10 (1976), 74—75.

[3] Induced representations of reductive p-adic groups I, *Ann Scien. E. N. S.*, 4 t 10 (1977), 441—472; I, ibid, t 13(1980), 165—210.

Bernstein I. N., Deligne P., Kazhdan D., Vigneras M. F.

Representations des groupes reductifs sur un corps local, Hermann, Paris, 1984.

Borel A.

[1] Linear Algebraic Groups, Benjamin, New York, 1969.

[2] Introduction aux groupes arithmetiques, Hermann, Paris, 1969.

[3] Collected Papers, 1, 2, 3, Springer-Verlag, 1983.

Borel A. and Tits J.

Groupes reductifs, *Publ. Math. I. H. E. S.*, 27 (1965), 55—150, 41 (1972), 253—276.

Borel A. and Wallach N.

Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups, Princeton University Press, 1980.

Bruhat F.

[1] Sur les representations induites des groupes de Lie, *Bull*

Soc. Math. France, 84 (1956), 97—205.

[2] Sur les representations des groupes classiques p-adiques. I, II, *Amer. J. Math.*, 83 (1961), 321—338; 343—368.

[3] Distributions sur un groupe localement compact et applications a l'etude des representations des groupes p-adiques, *Bull. Soc. Math. France*, 89 (1961), 43—75.

[4] Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalley sur un corps p-adique, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 23 (1964), 46—74.

[5] p-adic groups, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence R. I., (1966), 63—70.

Bruhat F. and Tits J.

[1] Groupes algebriques simples sur un corps local, Proc. Conference on Local Fields (Driebergen, 1966), Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[2] Groupes reductifs sur un corps local. Chaptire I, Donnees radicielles valuees, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 41 (1972), 5—251; Chapitre II, IHES, *Pub. Math.*, 60(1984), 197—376.

Carayol H.

Representations cuspidales du groupe lineaire, *Ann. Scien. Ecole. Norm. Sup.*, 4 serie t 17 (1984), 191—225.

Cartier P

[1] Sur les representations des groupes reductifs p-adiques et leurs caracteres, Seminaire Bourbaki, 28e annee, 1975/76, expose 471, Lecture Notes in Math., vol. 567, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[2] Representations of p-adic groups, A survey, Corvallis proceedings, *AMS Proc. Symp. Pure Math.*, 33 part 1, 111—156.

Casselman W.

[1] Jacquet Modules for Real Reductive Groups, Proc. Int'l Congress of Math., Helsinke (1978), 558—562.

[2] The *n*-cohomology of Representations with an infinite simal character. *Comparitio Math.*, vol. 31, Fasc. 2 (1975), 219--227.

[3] Characters & Jacquet Modules, *Math. Ann.*, 230 (1977), 101—105.

[4] The Restriction of a Representation of $GL_2(k)$ to $GL_2(0)$, *Math. Ann.*, 206(1973), 311—318.

[5] The Restriction of Admissible Representations, *Math. Ann.*, 233 (1978), 193—198.

[6] GL_n, Algebraic Number Field, ed. by A. Frichlich, Academic Press, (1977), 663—704.

[7] On some results of Atkin & Lehner, *Math. Ann.*, 201 (1973), 301—314.

[8] On the Representations of $SL_2(k)$ related to Binary quadratic forms, *AJM*, vol. *XCIV*, No. 3 (1972), 810—834.

[9] A new non-unitarity argument for *p*-adic representation, *J. Fas. Sc. Univ. Tokyo IA*, 28 (1982), 907—928.

Casselman W. and Shalika J.

The unramified principal series of *p*-adic groups, I, II, *Comp. Math.*, 40 (1980), 387—406; 41 (1980), 207—231.

Christian U.

[1] Berechnung des Ranges der schar der Spitzformen, *J. reine. ange. Math.*, 277 (1975), 130—154.

[2] Bemerkungen uber Symplektische Gruppen, *Communications on Pure and Applied Math.*, vol. 29 (1976), 591—594.

[3] Uber gewisse Gleichungen zwischen symplektischen Matrizen, *J. fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 243 (1970), 56—65.

[4] Uber teilerfremde symmetrische Matrizenpaare, *J. fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 229 (1968), 44—49.

[5] On the factors of automorphy for the group of integral modular substitutions of second degree, *Ann. of Math.*, vol. 73, No. 1, (1961), 134—153.

[6] Eisenstein series for congruence subgroups of GL (*n*, *Z*), *AJM* (1983), 207—240.

[7] Siegelsche Modul funktionen, Math. Institute Univ. Gottingen, 1981.

Deligne P.

[1] Formes modulaires et representations l-adiques, Sem. Bourbaki 355 (1968/69), SLN 179.

[2] La conjecture de Weil, *Pub. Math. I. H. E. S.*, I, 43 (1974), 273—308; II, 52 (1980), 138—252.

[3] Les constantes des equations fonctionelles des fonctions I, Lecture Notes in Math. vol. 349, Springer-Verlag, (1973), 501—597.

[4] Formes modulaires et representations de GL (2), in Springer Lecture Notes 349 (1973), 55—106.

[5] Les constantes locales de L'equation fonctionnelle de la fonction *L* d'Artin d'une representation orthogonale, *Inv. Math.*, (1976), 299—316.

[6] Le support du caractere d'une representation supercuspidale, *Comptes Rendues de l'Academie des Sciences*, t 283 (1976), 155—157.

Deligne P. and Serre J. P.

Formes modulaires de poids I, *Ann. Scien E. N. S.*, 4 t 7 (1974), 507—530.

Demazure M. et Grothendieck A.

Schemas ep groupes, Springer Lecture Notes (1970), 151—153.

van Di jk G.

Computation of certain induced characters of *p*-adic groups,

Math. Ann., 199 (1972) , 229—240.

Dixmier J.

[1] Von Neumann algebras, North Holland Pub. Co., 1981.

[2] Les C^*-algebres et leurs representations, North Holland Pub. Co., 1977.

Eichler M.

Basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators, *SLN*, 320 (1973) .

Freitag E.

Siegelsche Modulfunktionen, Springer-Verlag, 1983.

Frey G.

Links between stable elliptic curve and diophantine equations, *Ann. Univ. Saraviensis*, 1 (1986).

Gantmacher F.

Canonical representation of automorphisms of a complex semisimple Lie group, *Mat. Sb.*, 47 (1939), 101—146.

Garrett P.

[1] Modular curves on arithmetic quotients, *Duke Math. J.*, vol. 49, No.3, (1982), 633—654.

[2] Arithmetic properties of Fourier Jacobian expansions of automorphic forms in several variables, *AJM*, vol. 103, No. 6 (1981), 1103—1134.

[3] Imbedded modular curves and arithmetic of automorphic forms on bounded symmetric domains, *Duke of Math. J.*, vol. 51, No.2 (1984), 431—458.

[4] Arithmetic and structure of automorphic forms on bounded symmetric domains, *AJM*, 1171—1216.

[5] Pulbacks of Eisenstein series, Applications, Taniguchi Symposium, Katata, (1983) Birkhausar (1984), 114—138.

Gelbart S.

[1] Automorphic Forms on Adele Groups, Princeton University Press, 1975.

[2] Automorphic forms & Artin's conjecture, *SLN*, 627 (1977), 241—276.

[3] An elementary introduction to the Langlands program, *BAMS*, 10 (1984), 177—219.

Gelfand I.M., Graev M. and Pyatetskii-Shapiro I.I.

Representation Theory and Automorphic Functions, Saunders Co., 1969.

Gelfand I.M. and Kazdan D.

Representation of GL(n,K), *Lie gronP and their RePresenta tion*, John Wiley (1975), 95—118.

Gerardin P.

[1] Construction die series discretes p-adiques, Lecture Notes in Math., vol. 462, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[2] Cuspidal unramified series for central simple algebras over local fields, these PROCEEDINGS, part 1, 157—169.

Gerardin P. and Kutzko P.

Facteurs Locaux pour GL(2). *Ann. Scient. E.N.S.*, 13 (1980), 349—384.

Gindinkin S.G. and Karpelevic F.I.

Plancherel measure for Riemann symmetric spaces of non-positive curvature, *Sov. Math.*, 3 (1962), 962—965.

Godement R.

[1] A theory of spherical functions I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 73 (1952), 496—556.

[2] Introduction a La theorie de Langlands, Sem. Bourbaki 321 (1966/67).

[3] Spectral decomposition of cusp forms, *AMS Proc. Symp. Pure Math.*, IX (1966), 225—234.

Godement R. and Jacquet H.

Zeta Functions of Simple Algebras, Lecture Notes in Math., vol. 260, Springer-Verlag, 1972.

Green J.

The characters of the finite general linear groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), 402—447.

Harder G., Langlands R.P., Rapoport M.

Algebraische Zyklem auf Hilbert-Blumenthal Flachen, *J. fur rein. u. ang. Math.*, 366 (1986), 53—120.

Harish Chandra

[1] Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups, Springer Lecture Notes 62, 1968.

[2] (Notes by G. van Dijk), Harmonic analysis on reductive p-adic groups, Lecture Notes in Math., vol. 162, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[3] Collected Papers, I, II, III, IV, Springer- Verlag.

Harris M.

[1] Maass Operators and Eisenstein series, *Math. Ann.*, 258(1981), 135—144.

[2] Eisenstein series on Shimura varieties, *Ann. of Math.*, 119 (1984), 59—94.

[3] Arithmetic vector Bundles on Shimura varieties, (1984), 138—159, Automorphic forms of several variables Taniguchi symposium, Katata (1983).

[4] Arithmetic vector bundles on automorphic torms on Shimura varieties I, *Invent. Math.*, 82 (1985), 151—189.

Hecht H. and Schmid W.

[1] A Proof of Blattner's conjecture, *Inv. Math.*, 31 (1975), 129—154.

[2] Characters, asymptotics and n-homology of Harish Chandra modules, *Acta Math.*, 151 (1983), 49—151.

Heilbronn H.

Zeta functions and L-functions, *Algebraic Number Theory*, edited by J.W.S. Cassels and A. Frohlich, Thompson, 1967, 204—230.

Hejhal D.

The Selberg trace formula for PSL (2,R), *SLN*, 548 and 1001.

Helgason S.

[1] Functions on symmetric spaces, Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol.26, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1973), 101—146.

[2] Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press.

Henniart G.

[1] La conjecture de Langlands locale pour GL(3). I.H.E.S. Notes, 1982.

[2] On the local Langlands conjecture for GL(n), The cyclic case, preprint.

[3] Galois ε-factors modulo roots of unity, *Invent. Math.*, 78 (1984), 117—126.

[4] On the local Langlands conjecture for GL(n), preprint I.A.S., Princeton. N.J., April, 1984.

Howe R.

[1] Tamely ramified supercuspidal representations of $GL_n(F)$, *Pacific J. Math.*, 73(1977), 437—460.

[2] The Fourier transform and germs of characters (case of GL_n over a p-adic field), *Math. Ann.*, 208 (1974), 305—322.

Humphreys J.E.

Arithmetic groups, Springer SLN 789, 1980.

Indik R.A.

Fourier coefficient of nonholomorphic Eisenstein series on a tube domain, Princeton University, 1982.

Iwahori N.

Generalized Tits systems (Bruhat decomposition) on p-adic semisimple Lie groups, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol.9, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1966), 71—83.

Iwahori N. and Matsumoto H.

On some Bruhat decompositions and the structure of the Hecke ring of the p-adic Chevalley groups, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 25 (1965), 5—48.

Jacquet H.

[1] Functions de whittaker associees aux groups de Chevalley, *Bull-Soc. Math. France*, 95 (1967) , 243—309.

[2] Euler Products and Automorphic Forms, *Proceedings of the International Congress of Math.* (1974) , 459—463.

[3] Principal L-Functions of the Linear Group, *Proceedings Symposia Pure Math.*, vol.33 (1979), part 2, 63—86.

[4] Zeta function of simple algebra (local theory), *AMS Proc. Symp. Pure Math.*, 26 (1973) , 381—386.

[5] A non-vanishing theorem for zeta function of GL_n, *Inv. Math.*, 38 (1976) , 1—16.

[6] Representations des groupes lineaires p-adiques, Theory of Group Representations and Harmonic Analysis (C.I.M.E., II Ciclo, Montecatini terme, 1970), Edizioni Cremonese, Roma,

1971, 119—220.

[7] Sur les representations des groupes reductifs *p*-odiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, A 280 (1975), 1271—1272.

[8] Generic representation, Springer LN Math. 587 (1977), 91—101.

Jacquet H. and Gelbart S.

[1] Forms of GL(2) from the analytic point of view, *AMS Proc. Symp. Pure Math.*, 33(1), (1979), 213—252.

[2] A relation between automorphic representations of GL(2)and GL(3), Assn. Sciod. EL. Norm. Sup., 4 seric, t 11 (1978), 471—542, from GL(2) to GL(*n*), 173—188.

Jacquet H. and Lai K.F.

[1] Sur une formulae des traces relative, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t 296 (1983), 959—963.

[2] A relative trace formula, *Compositio Math.*, 54 (1985), 243—310.

Jacquet H. and Langlands R.P.

Automorphic Forms on GL(2), Lecture Notes in Math., vol. 114, Springer-Verlag.

Jacquet H., Piatatskii-Shapiro I.I., Shalika J.A.

[1] Automorphic forms on GL(3) I, II, *Ann. of Math.*, 109(1979), 169—212.

[2] Rankin-Selberg Convolutions, *AJM*, 367—464.

Jacquet H. and Shalika J.A.

[1] Hecke Theory for GL(3), *Composition Math.*, vol. 29 (1974), 75—87.

[2] Comparaison des representations automorphes du groupe lineaire, *C.R.Acad. Sci. Paris*, Ser. A. 284 (1977), 741—744.

[3] Euler products and classification of automorphic form I, *AJM*, 103 (1981), 499—558, II ibid 103 (1981), 777—815.

Keys D.

On decomposition of irreducible principal series representations of p-adic Chevalley groups, *Pacific J. Math.*, 101(1982), 351—388.

Kazhdan D.

On lifting, Lecture Notes in Math. vol. 1041, Springer-verlag, 1983, 209—249.

Klingen H.

[1] Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Raumen. I, *Math Ann.*, 129 (1955), 346—369.

[2] Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Raumen II, *Math. Ann.*, 130 (1955), 137—146.

[3] Uber die analytischen Abbildungen verallgemeinerter Einheitskreise auf sich, *Math. Ann.*, 132 (1956), 134—144.

[4] Uber die Erzeugenden gewisser Modulgruppen, *Mathematisch-Physikalisch Klasse, Nr.* 8 (1956), 173—185.

[5] Zur Theorie der hermitischen Modulfunktionen, *Math. Ann.*, 134 (1958), 355—384.

[6] Bemerkung uber Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe n-ten Grades, *Archiv der Math.*, vol. X (1959), 113—122.

[7] Analytic automorphisms of bounded symmetric complex domains, *Pacific J. of Math.*, vol. 10, No.4 (1960), 1327—1332.

[8] Zur Transformationstheorie von Thetareihen indefiniter quadratischer Formen, *Math. Ann.*, 140 (1960), 76—86.

[9] Eisensteinreihen zur Hilbertschen Modulgruppe n-ten Grades, *Mathematisch-Physikalische Klasse*, Nr.4 (1960), 87—104.

[10] Volumbestimmung des Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppe n-ten Grades, *J. fur Math.*, 206 (1961), 9—19.

[11] Quotientendarstellung Hermitscher Modulfunktionen durch Modulformen, *Math. Ann.*, 143 (1961), 1—18.

[12] Charakterisierung der Siegelschen Modulgruppe durch ein endliches System definierender Relationen, *Math. Ann.*, 144

(1961), 64—72.

[13]Uber die Werte der Dedekindschen Zetafunktion, *Math.Ann.*, 145 (1962), 265—272.

[14]Uber den arithmetischen Charakter der Fourierkoeffizienten von Modul formen, *Math. Ann.*, 147 (1962), 176—188.

[15]Uber einen Zusammenhang zwischen Siegelschen und Hermiteschen Modulfunktionen, *Hbg. Math. Abh.*, XXVII (1964), 1—13.

[16]Eine potentialtheoretische Methode zur Behandlung von Poincareschen Reihen, *Mathematisch-Physikalische Klasse*, Nr.2 (1965), 17—29.

[17]Bemerkungen zur Konvergenz von Poincareschen Reihen, *Mathematisch-Physikalische Klasse*, Nr. 1 (1966), 1—9.

[18]Zum Darstellungssatz fur Siegelsche Modul formen, *Math. Zeitschr.*, 102 (1967), 30—43.

[19]Uber Poincaresche Reihen zur Siegelschen Modulgruppe, *Math. Ann.*, 168 (1967), 157—170.

[20]Berichtigung zu Zum Darstellungssatz fur Siegelsche Modul formen, *Math. Zeitschr.*, 105 (1968), 399—400.

[21]Zur Struktur der Siegelschen Modulgruppe, *Math. Z.*, 136 (1974), 169—178.

[22]Uber Poincaresche Reihen vom Exponentialtyp, *Math. Ann.*, 234, (1978), 145—157.

[23]Das Werk C.L. Siegels in der Funktionentheorie, *Jber. d. Dt. Math.-Verein*, 85 (1983), 158—173.

[24]On Eisenstein series and some applications, Automorphic forms of Several variables Taniguchi Symposium, Katata(1983) Birkhauser, 1984, 226—243.

Klingenberg C.

Die Tate-Vermatungen fur Hilbert-Blumenthal Flachen,Bonn, 1986.

Knapp A.W.

Representation Theory of Semisimple Groups, An overview

based on Examples, Princeton University Press, 1986.

Knapp A.W.and Stein E.M.

[1] Intertwining operators for semisimple groups, *Ann. of Math.*, (2)93(1971), 489—578.

[2] Intertwining operators for semisimple groups Ⅱ, *Inv. Math.*, vol.60(1980), 9—84.

Koch H.

[1] Classification of the primitive representations of the Galois groups of local fields, *Invent.Math.*, 40(1977), 195—216.

[2] On the local Langlands conjecture for central division algebras of index p, *Invent.Math.*, 62(1980), 243—268.

Kubota T.

Elementary Theory of Eisenstein Series, John Wiley & Sons, New York, 1973.

Kutzko P.

[1] The irreducible imprimitive local galois representations of prime dimension, *J.Algebra*, 57(1979), 101—110.

[2] The Langlands conjecture for GL_2 of a local field, *Ann.of Math.*, 112(1980), 381—412.

Kutzko P.and Moy A.

On local Langlands conjecture, *Ann.of Math.*, 121 (1985), 495—517.

Labesse J.P.and Dufes M.

Sur la formulae des traces de Selberg, *Ann.ENS.*, 4, t 4(1971), 193—284.

Lai K. F.

[1] 一个椭圆曲线的猜想，应用数学与计算数学，科学技术文献出版社（重庆），1(1980)13—27.

[2] Hilbert 第12个问题：互反律及 Langlands 猜想，中山大学学报（自然科学）3 (1981) 104—114.

[3] Algebraic cycles on compact Shimura surface, *Math. Z.*, 189 (1985), 593—602.

Lang S.L.

SL(2, R), Addison Wesley.

Langlands, R.P.

[1] The dimension of spaces of automorphic forms, *Amer.J.Math.*, vol.85 (1963), 99—125.

[2] On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Springer LN 544(1976).

[3] Eisenstein series, Proc. *Sympos. Pure Math.*, vol.9, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode island, 1966, 235—252.

[4] Dimension of spaces of automorphic forms, *Proc.Sympos. Pure Math.*, vol.9, Amer.Math.Soc., Providence, Rhode Island, 1966, 253—257.

[5] Euler products, Lecture Notes, Yale University, 1967, Yale U.P.(1971).

[6] Representations of abelian algebraic groups, Lecture Notes, Yale University, 1968.

[7] Problems in the theory of automorphic forms, Lectures in Modern Analysis and Applications, Georgetown, 1969. (Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, vol.170(1970).

[8] On the functional equation of the Artin L-functions. (Preprint)

[9] On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, IAS notes, 1973.

[10] Modular forms and l-adic representations, *SLN*, 349 (1973), 361—500.

[11] Base Change for GL_2, The Theory of Saito-Shintani with Applications, *Ann. of Math. Studies.*, Princeton University Press.

[12] On the notion of an automorphic representation, Corvallis

proceedings, *AMS Proc.Symp. Pure Math.*, 33 part 1, 203—207.

[13]Automorphic representations,Shimura varieties,and motives, Ein Marchen, Corvallis proceedings, *Proc. Symp.Pure Math.*, 33, part 2, 205—246.

[14]On the zeta functions of some simple Shimura varieties, *Canadian J.Math.*, 31(1979), 1121—1216.

Li Wen-Ching Winnee

[1] Newforms and Functional Equations, *Math.Ann.*, 212(1975), 285—315.

[2] *L*-series of Rankin Type and Their Functional Equations, *Math.Ann.*, 244(1979), 135—166.

[3] On Converse Theorems for GL(2) and GL(1), *AJM*. 103(1980), 851—885.

[4] On the representations of GL(2) I ε-factors and n-closeness, *Crelle*, Band 313(1980), 27—42.

[5] On the representations of GL(2) I ε-factors of the representations of GL(2)×GL(2), *Crelle*, Band 314, (1980), 3—20.

Macdonald I.G.

Spherical Functions on a Group of p-adic type, Ramanujan Institute, Univ.of Madras Publ., 1971.

Matsumoto H.

Analyse harmonique dans les systemes de Tits bornologiques de type affine, *SLN*. 590(1977), Springer-Verlag.

Mautner F.I.

[1] Spherical functions, I, *AJM*, 80(1958), 441—457; I, *AJM*, 86 (1964), 171—200.

[2] Fourier Inversion, *TAMS*, 78(1955), 371—384.

Miyake T.

On automorphic forms on GL(2) and Hecke operators, *Ann. of Math.*, 94(1971), 174—189.

Oesterle J.

Sur La trace des operateurs de Hecke, These, University Paris-Sud., 1977.

Ogg A.P.

Modular forms & Dirichlet series, Benjamin Publ.,New York, 1969.

Olshanskii G.

Intertwining operators for the general linear group over a local division algebra, *Matem.Sbornik*, 93(1974), 218—253.

Ono T.

[1] On some arithmetic properties of linear algebraic groups,*Ann. of Math.*, 70(1959), 266—290.

[2] On relative Theory of Tamagawa numbers, *Ann.of Math.*, 82 (1965), 88—111.

Osborne, M.S., and Warner, G.

[1] The Selberg trace formula I, Γ-rank one lattices, *Crelle's J.*, vol.324(1981), 1—113.

[2] The Selberg trace formula II, Partition, reduction, truncation, *Pacific J. Math.*, 106(1983), 307—496.

[3] The Selberg trace formula III, *Memoris Ann.Math. Soc.*, 283 (1983), 1—209.

[4] The Selberg trace formula IV, *SLN*, 1024(1983), 112—263.

[5] The Selberg trace formula V, *TAMS*, 286(1984), 351—376.

[6] The Selberg trace formula VI, *AJM*, 107(1985). 1369—1437.

Platonov V.P.

[1] Problem of Strong Approximation & Kneser Tits conjecture, *Math.USSR.Izv.*, 3(1969), 1139—1147, 4(1970), 784—786.

[2] Arithmetic theory of algebraic groups, *Russian Math.Surveys*, 37, 3(1982), 1—62.

Ponomarev P.

Arithmetic of quaternary quadratic forms, *Acta Arith.*, XXIX (1976), 1—48.

Rankin R.A.

[1] Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions, (1939), 351—372.

[2] Hecke operators on congruence subgroups of the modular group, *Math.Ann.*, 168(1967), 40—58.

[3] An Ω-result for coefficient of cusp forms, *Math. Ann.*, 203 (1973), 239—250.

Robert A.

Modular representations of the group GL(2)over a local field, *Jour.of Alg.*, 22(1972), 386—405.

Rodier F.

Whittaker Models for admissible representations of reductive p-adic split groups.

Sally P.J., Jr.

Character formulas for SL_2, in Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, *Proc.Symp.in Pure Math.*, XXVI(1972),395—400.

Satake I.

Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-apic fields, *Inst.Hautes Etudes Sci.Publ.Math.*,18(1963), 1—69.

Schiffmann G.

Integrales d'entrelacement et fonctions de Whittaker, *Bull. Soc.Math.France*, 99(1971), 3—72.

Schmid W.

[1] On a conjecture of Langlands, *Ann.of Math.*, 93(1971), 1—42.

[2] Representations of semisimple Lie groups, Proc.Int'l Congr. Math.Helsinki(1978), 195—208.

Schoeneberg B.

Elliptic modular function, Springer-Verlag, 1974.

Selberg A.

[1] Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, *J.Indian Math.Soc.*, vol.20(1956), 47—87.

[2] Automorphic functions and integral operators, Seminars on Analytic Functions, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, vol.2.

[3] A new type of zeta function connected with quadratic forms, Report of the Institute in the Theory of Numbers, 207—210, Boulder, Colorado, 1959.

[4] On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, Contributions to Function Theory, 147—164, Bombay, 1960.

[5] Discontinuous groups and harmonic analysis, Proc.Int.Congr. of Math., 177—189, Stockholm, 1962.

[6] On the estimation of Fourier coefficients of modular forms, *Proc.Sympos.Pure Math.*, vol.8, Amer.Math. Soc., Providence, Rhode island, 1965, 1—15.

[7] Recent developments in the theory of discontinuous groups of motions on symmetric spaces, Proceedings of the 15th Scandinavian Congress, Oslo, 1968. (Lecture Notes in Math., vol.118, 1970, Springer-Verlag.)

Serre J.P.

Selected Papers, Springer-Verlag.

Shahidi F.

[1] Functional Equation satisfied by certain L-function, *Comp. Math.*, 37(1978), 171—207.

[2] Normanishing of L'function, *BAMS*, 2(1980), 462—464.

[3] Whittaker models for real group, *Duke Math. J.*, 47(1980), 79—125.

[4] Some Results on L-indistinguishability for SL(r), *Canadian J. of Math.*, vol.XXXV, No.6 1075—1109, Dec., 1983.

[5] On non-vanishing of L-functions for GL(a), Canadian Math. Soc.Conference Proceedings, vol. 1(1981), 117—122.

[6] Local coefficients and normalization of intertwining operators for GL(a), *Comp.Math.*, 48(1983), 271—295.

[7] Fourier transforms of intertwining operators and plarcherd means for GL(a), *AJM*, (1981), 67—111.

[8] On Certain L-function, *AJM* vol.103, No.2(1980), 297—355.

Shalika J.

Representation of two-by-two Unimodular group over local fields, IAS Notes.

Shelstad D.

L-indistinguishability for real groups, *Math.Ann.*, 259(1982). 385—430.

Shimizu H.

On traces of Hecke operators, *J.Fac.Sc.Univ.Tokyo*,(I)X(1963), 1—19.

Shimura G.

[1] Modules des varieties abeliennes polarisees et fonctions modulaires I, Sem.H.Cartan, E.M.S., (1957—58), n° 18, 19, 20.

[2] Correspondences modulaires et les fonctions zeta de courbes algebriques, *J.Math.Soc.Japan*, vol.10, No.1, (1958), 1—28.

[3] Sur les integrales attachees aux formes automorphes, *J. of Math. Soc.Japan*, vol.2, No.4, (1959), 292—311.

[4] On the theory of automorphic functions, *Ann.of Math.*, vol. 70, No.1, (1959), 101—144.

[5] On the zeta functions of the algebraic curves uniformized by certain automorphic functions, *J.Math.Soc., Japan*, vol. 13, No.3 (1961) , 276—331.

[6] On modular correspondences for SP(N, Z)and their congruence relations, P of the National Academy of Sci.vol.49(1963), 824—828.

[7] Arithmetic of alternating forms & quaternion hesmitian forms, *J.Math.Soc., Japan*, vol.15, No.1, (1963), 34—65.

[8] On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions, *Ann. of Math.*, vol.78(1963), 149—192.

[9] Arithmetic of Unitary groups, *Ann.of Math.*, 79 (1964), 369—409.

[10]Moduli and fibre systems of abelian varieties, *Ann. of Math.*, vol.83 (1966), 294—338.

[11]Discontinuous groups and abelian varieties, *Math. Ann.*, 168 (1967), 171—199.

[12]Algebraic number fields and symplectic discontinuous groups, *Ann.of Math.*, vol.86 (1967), 503—592.

[13]Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves, *Ann.of Math.*, vol.85 (1967) , 58—159.

[14]Algebraic varieties without deformation & the chow variety, *J.Math.Soc.Japan*, vol.20, No.1—2 (1968) .

[15]Local representations of Galois groups, *Ann. of Math.*, vol. 89 (1969) , 99—124.

[16]On Canonical models of arithmetic quotients of baunded symmetric domains, *Ann. of Math.*, vol.91, No. 1(1970), 144—222.

[17]Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton Univ.Press, 1971.

[18]Field of Rationality Ab.V., *Nagoya M.J.*, 45(1971), 167—178.

[19]On elliptic curves with complex multiplication as factors of the Jacobian of modular function fields, *Nagoya Math. J.*, vol.43, (1971) , 199—208.

[20]On the zeta function of an abelian variety with complex multiplication, *Ann.of Math.*, vol. 94 (1971), 504—533.

[21]Class fields over real quadratic fields and Hecke operators, *Ann.of Math.*, vol.95 (1972) , 130—190.

[22]On modular forms of half integral wt., *Ann.of Math.*, vol. 97 (1973) , 440—481.

[23]On the factors of the jacobian variety of a modular function field, *J.Math.Soc., Japan*, vol.25, No.3, 1973.
[24]On the factors of the Jacobian variety of a modular function field, *J.Math.Soc.Japan*, vol.25, No.3 (1973) , 523—544.
[25]On some arithmetic properties of modular forms of one & several variables, *Ann.of Math.*, 102 (1975) , 491—515.
[26]On the Fourier coefficients of modular forms of several variables, Nachrichten Der Akademic dur Wissemschaften in Gottingen I, Mathematisch-physikalische Klasse (1975),1—8, Nr.17.
[27]The special values of the zeta functions associated with Cusp forms,*Communications on Pure and Applied Math.*,vol. 29(1976), 783—803.
[28]Theta function with complex multiplication, *Duke Math.J.*, 43 (1976) , 673—696.
[29]On the derivatives of theta functions and modular forms, *Duke Math.J.*, vol.44 (1977) , 365—387.
[30]On the periods of modular forms, *Math.Ann.*, 229 (1977),211—221.
[31]The special values of the zeta functions associated with Hilbert Modular forms, *Duke Math.J.* (1978) , vol.45, 637—679.
[32]On special values of zeta functions of Totally Real Alg. No. fields, P.of the Int'l. Congress of Math., Helsinki, 1978.
[33]On certain reciprocity laws for theta functions and modular forms, *Acta.Math.*, vol.141 (1978) , 37—71.
[34]The arithmetic of automorphic forms w.r.t.a unitary group, *Ann.of Math.*, 107 (1978) , 569—605.
[35]Automorphic forms and the periods of abelian varieties, *J Math.Soc.Japan*, vol.31 (1979) , 562—591.
[36]Confluent Hypergeometric Functions on Tube Domains,*Math. Ann.*, 260 (1982) , 269—302.
[37]The periods of certain automorphic forms of arithmetic type, J.of Faculty of Sci., University of Tokyo, Sec.IA, vol. 28, No.3 (1982) , 605—632.
[38]On Eisenstein series, *Duke Math.J.*, 50 (1983) , 417—476.

[39]Algebraic relations between critical values of zeta functions and inner products, *AJM*, 104 (1983) , 253—285.

[40]On differential operators attached to certain representations of classical groups, *Invent.Math.*, 77 (1984) , 463—488.

[41]Differential operators and the singular values of Eisenstein series, *Duke Math.J.*, vol.51, No.2 (1984) , 261—329.

[42]On Eisenstein series of half-integral weight, *Duke Math.J.*, vol.52, No.2, (1985) , 281—314.

[43]On the Eisenstein series of Hilbert modular groups, Revista Matematica Iberoamericana, vol.1 No.3, (1985) , 1—42.

[44]On a class of nearly holomorphic automorphic forms, *Ann.of Math.*, 123 (1986) , 347—406.

[45]Field of automorphic functions, 160—385.

[46]Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field, 134—175.

[47]On specialization of abelian varieties, 187—210.

[48]On the zeta function of a fibre variety whose fibres are abelian varieties, 478—539.

[49]On complex multiplications, Proc.Int'l.Symp.Alg. Nb. Th., Tokyo, 55, 24—30.

[50]On the field of definition for a field of automorphic functions, Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ.

[51] A reciprocity law in non-solvable extensions.

Shintani T.

On certain square integrable irreducible unitary representations of some p-adic linear groups, *J. Math. Soc. Japan*, 20 (1968), 522—565.

Siegel C.L.

Gesammelte Abhandlungen, Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, Springer-Verlag.

Silberger A.J.

[1] All algebras of spherical functions defined on the two-by-two general linear group with entries in a locally compact p-adic

field are commutative, *Proc.Amer.Math.Soc.*, 21 (1969) ,437—440.

[2] PGL_2 over the p-adics, Lecture Notes in Math.166,Springer-Verlag, 1970.

[3] Langlands quotient theorem, *Math.Ann.*, 236 (1978) ,95—104.

[4] Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups, Princeton University Press.

Stuhler U.

Uber die Kohomologie einiger arithmeticher Varietaten I, *Math.Ann.*, 273 (1986) , 685—699.

Sugiura M.

Unitary Representation and Harmonic Analysis——An Introduction, Kodansha LTD, 1975.

Tamagawa T.

On Selberg's trace formula, *J.Fac. Sc. U. Tokyo*, 8 (1960) , 363—386.

Tanaka S.

On irreducible unitary representation of some speciai linear groups of the second order, *Osaka J. Math.*, 3 (1966) , 217—227.

Tate J.

[1] Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions,in Cassels & Frohlich ed., Algebraic Number Theory, Thompson Book Co., 1967.

[2] Algebraic cycles and poles of zeta functions, 93—110,in Arithmetic Algebraic Geometry ed.by O. F. G. Schilling, New York,Harpers & Row, 1965.

[3] Number Theoretic Background in Automorphic Forms, Representations and L-functions, *Proc. Symp. in Pure Math.*, XXXIII, Part 2 (1979) , 3—26.

Tunnell J.B.

On the local Langlands conjecture for GL (2), *Inv. Math.*, 46 (1978), 179—200.

Varadarajan V.S.

[1] Theory of characters and the discrete series for semisimple Lie groups, *AMS Proc. Symp. Pure Math.*, XXVI (1973), 46—99.

[2] Harmonic Analysis on Real Reductive Groups, Springer Lecture Notes 576, 1977.

Vigneras M.F.

[1] Arithmetique des algebres de quaternions, SLN 800 (1980), Springer-Verlag.

[2] Valeur au centre de symmetric des Fonction L associces aux formes modulaires, in Seminaire de Theorie des Numbres, Paris 1979—1980, edited by M.J.Bertin (Seminaire D.P.P.), Birkhauser-Verlag, Boston 1981, 331—356.

Vogan D.A.

Representations of real reductive Lie groups, Birkhauser, 1981.

Waldspurger J.L.

[1] Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier, *J.de Math.pures et appliques.*, 60 (1981), 375—484.

[2] Correspondence de Shimura, *J.Math.Pures et App.*, 59 (1980), 1—133.

[3] Quelques proprietes arithmetiques de certaines formes automorphes sur GL(2), *Comp.Math.*, 54 (1985), 121—171.

[4] Sur les valeurs de certaines fonctions L, *Comp. Math.*, 54 (1985), 173—242.

Wallach N.

Representations of reductive Lie groups, AMS Pro. Symp. Pure Math. 33 (1) (1979), 71—86.

Warner G.

Harmonic analysis on Semisimple Lie Groups, Springer.

Weil A.

[1] Basic Number Theory, Springer-Verlag.

[2] Dirichlet series and automorphic forms, Springer LN 189 (1971).

[3] Collected Papers, Springer-Verlag.

[4] Adeles and algebraic groups, Birkhauser, 1982.

[5] Elliptic function according to Eisenstein and Kronecker, Springer-Verlag, 1976.

Williams G.

The principal series of a p-adic group, *Quart. J. Math. Oxford* (2), 29 (1978), 31—56.

Zelevinsky A.V.

Induced representations of reductive p-adic groups, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 13 (1980), 165—210.

名 词 索 引*

三 画

子商　subquotient　131

四 画

左正则表示　left regular representation　2

不完全 θ 级数　non-complete θ-series　147

五 画

右正则表示　right regular representation　2

对合　involution　74

可容许$(\mathfrak{g}, K)$模　admissible $(\mathfrak{g}, K)$-module　7

可容许 G_A 模　admissible G_A-module　100

可容许表示　admissible representation　41, 86, 95, 100

可因子分解的表示　factorizable representation　108

六 画

光滑表示　smooth representation　41

光滑函数　smooth function　128

尖性表示　cuspidal representation　68

尖形式　cusp form　131

尖性模形式　cusp modular form　136

初等幂等元素　elementary idempotent element　86,94,100

有限函数　finite function　122

自守形式　automorphic form　129

---

* 以英文开头的名词按字母顺序排在最后.

七　画

酉表示　unitary representation　2
近似单位　approximate identity　76

八　画

拓扑群的对偶　dual of a topological group　5
拓扑群的连续表示　continuous representation of a topological group　5
限制张量积　restricted tensor product　98
迹公式　trace formula　189

十一画

赋范空间　normed space　73
常数项　constant term　131

十二画

缓增函数　slowly increasing function　127

十三画

群代数　group algebra　75
截算子　cut operator　151, 182
截 Eisenstein 级数　cut Eisenstein-series　153

十四画

椭圆元素　elliptic element　171
椭圆元素类　elliptic element class　171

英文开头的名词

Banach 空间　Banach space　73
Bruhat 分解式　Bruhat decomposition　56, 175

C^*-代数　C^*-algebra　74
Eisenstein 级数　Eisenstein serie　143, 180
Hecke 代数　Hecke algebra　85, 91, 99
Hecke 有限　Hecke finite　129
Hecke 算子　Hecke operator　140
Iwasawa 分解式　Iwasawa decomposition　6
Jacquet 模　Jacquet-module　67
Maaβ-Selberg 关系式　Maaβ-Selberg relation　155
Schwartz 函数　Schwartz function　128
Schwartz 空间　Schwartz space　128
Schwartz-Bruhat 空间　Schwartz-Bruhat space　46, 128
$(\mathfrak{g}, K)$模　$(\mathfrak{g}, K)$-module　6
*-表示　*-representation　78
*-Banach 代数　*-Banach algebra　76

符号索引

$\mathscr{I}(\mu_1,\mu_2)$ 8, 44, 132

$\mathscr{A}$ 150

$\mathscr{R}$ 150

$S_k(N,\psi)$ 136

$E(g,\Phi,z)$ 143

$M(z)\Phi$ 145

$K(x,y)$ 170

$K_p(x,y)$, $K_{p,s}(x,y)$ 171

$K_{G,\chi}$ 181

$K_{B,\chi}$ 181

$k_0^T(x,f)$ 173

$k_\chi^T(x,f)$ 183

$J_0^T(f)$ 179

$J_\chi^T(f)$ 188

L^2_{cusp} 179

常用的符号

$\boldsymbol{Z}$	有理整数环
$\boldsymbol{Q}$	有理数域
$\boldsymbol{R}$	实数域
$\boldsymbol{C}$	复数域
$\boldsymbol{A}$	Adele环
$L^2(X)$	X 上的二次可积复值函数空间
$C_c(X)$	X 上有紧支集的连续复值函数空间

[General Information]
书名=二阶矩阵群的表示与自守形式
作者=黎景辉　蓝以中
页数=230
SS号=10188779
DX号=
出版日期=1990年02月第1版
出版社=北京大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
引言
第一章 GL(2, R)的无限维表示
1 拓扑群的表示
2 (9, K)模
3 可容许表示的分类
4 GL(2, C)的可容许表示
习题一
第二章 p进域上GL(2)的无限维表示
1 完全不连通群的表示
2 诱导表示的结构
3 Jacquet模
习题二
第三章 Hecke代数和GL(2, A)的表示
1 群代数
2 Hecke代数(υ&seperator∞)
3 Hecke代数(υ<∞)
4 限制张量积和GA的Hecke代数)
习题三
第四章 自守形式
1 约化理论
2 自守形式
3 尖形式
第五章 Eisenstein级数
1 基本性质
2 截算子
3 常数项原则
4 解析延拓

第六章 迹公式
1 正则表示的积分核
2 核的轨道分解
3 核的表示分解
4 迹公式
后记
参考文献
名词索引
符号索引
常用的符号